

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET AUTOMATIQUE

***Analyse du mouvement tridimensionnel à partir  
de séquences d'images en utilisant des surfaces  
spatio-temporelles***

Théo Papadopoulos, Olivier Faugeras

**N° 2167**

Janvier 1994

PROGRAMME 4

Robotique,  
image  
et vision

 ***apport  
de recherche***

**1994**



# Analyse du mouvement tridimensionnel à partir de séquences d'images en utilisant des surfaces spatio-temporelles

Théo Papadopoulos\*, Olivier Faugeras\*\*

Programme 4 — Robotique, image et vision  
Projet Robotvis

Rapport de recherche n° 2167 — Janvier 1994 — 85 pages

**Résumé :** Ce rapport traite du problème de l'obtention de la structure d'une scène à partir d'une séquence d'images dans le cas particulier des courbes rigides. Il est maintenant connu qu'il est possible théoriquement de retrouver un tel mouvement, et par suite sa structure, en observant cette courbe rigide à l'aide d'une caméra si l'on sait calculer un certain jeu de paramètres défini sur la surface spatio-temporelle engendrée par cette courbe. Ce résultat est vrai dans le cadre générique de la vision par ordinateur où le modèle sténopé a été adopté pour la caméra. Nous donnons ici une nouvelle simplification des résultats précédents. Cependant, cette théorie reste encore difficile à implémenter. Afin de démontrer la faisabilité d'une telle implémentation, nous avons avancé dans deux directions complémentaires: tout d'abord nous avons traité le cas particulier des courbes rigides planes qui se trouve être plus aisé à implémenter. Par ailleurs, nous montrons qu'il est possible de calculer à partir des images les dérivées spatio-temporelles nécessaires à l'implémentation du cas général. Afin de montrer la précision des résultats obtenus ainsi que l'efficacité des implémentations, nous avons testé celles-ci à l'aide de séquences d'images aussi bien synthétiques que réelles.

**Mots-clé :** analyse du mouvement, structure à partir du mouvement, courbes rigides, surface spatio-temporelle, vision par ordinateur

*(Abstract: pto)*

. La recherche décrite dans ce rapport a reçu le soutien financier de la DRET (contrat N° 911349/A00) et du projet ESPRIT BRA Insight II

\*. papadop@sophia.inria.fr

\*\* faugeras@sophia.inria.fr

# Three dimensional motion analysis from image sequences using spatio-temporal surfaces

**Abstract:** This report discusses the well known problem of structure from motion for the special case of rigid curves. It is already known that it is theoretically possible to recover the motion and then the structure of a moving 3D rigid curve observed in a monocular image sequence as soon as some set of derivatives that are defined on the so-called spatio-temporal surface can be computed. This is true under the most general camera model of perspective projection. We give here a new simplification of the previous results. However, this theory is still quite difficult to implement. In order to show that this implementation is indeed feasible, we proceeded towards two main directions. First, we have implemented the special case of planar rigid curves which turns out to be much more tractable and quite informative. As a step towards the general case, we show that the necessary derivatives defined on the spatio-temporal surface can indeed be computed from the images : one of the main practical difficulty for the implementation of the theory is thus solved. In order to demonstrate the accuracy of the results and the effectiveness of the implementations, we experiment on both synthetic and real image sequences.

**Key-words:** motion analysis, structure from motion, rigid curves, spatio-temporal surfaces, computer vision

# Introduction

Ce rapport présente les travaux que nous avons effectués sur l'étude du mouvement des courbes. Nous nous sommes attachés à décrire ici les nouveaux résultats tant théoriques que pratiques obtenus. Afin de ne pas noyer ce rapport sous les détails, nous donnerons souvent des éléments de preuves plutôt que des preuves complètes et certains détails d'implémentation ne seront pas décrits extensivement. Néanmoins certaines de ces preuves se trouvent dans [Fau93] et [FP93].

Le plan de ce rapport est le suivant. Dans le chapitre 1, nous rappellerons brièvement certains résultats concernant le mouvement des courbes élastiques. Outre ces rappels, ce chapitre nous servira essentiellement à introduire certains objets (comme la notion de surface spatio-temporelle) et certaines des notations mathématiques qui seront utilisées par la suite. Dans le chapitre 2 nous rappellerons les équations théoriques qui permettent de relier le mouvement 3D d'une courbe tri-dimensionnelle rigide aux paramètres différentiels définis sur la surface spatio-temporelle. Nous montrerons les liens qui existent entre ces différentes équations et nous décrirons brièvement une technique permettant d'obtenir un jeu d'équations "globales" à une courbe observée donnée. L'objet du chapitre 3 sera de détailler certains cas particuliers que nous avons examinés et qui permettent d'avoir des relations plus simples. On s'est attaché dans ce chapitre à envisager aussi bien les cas intéressants "physiquement" que des cas intéressants surtout pour des raisons théoriques. Enfin, le chapitre 4 nous permettra de faire le point sur l'état d'avancement de l'implémentation de ces idées et sur les difficultés qui peuvent exister à extraire les mesures qui nous sont nécessaires dans des images. Nous concluerons ensuite brièvement

cette étude par une description des voies que nous comptons emprunter dans le futur.

# Chapitre 1

## Le champ de mouvement d'une courbe

Le but de cette section est d'introduire quelques notations relatives au problème qui va être étudié. Dans un second temps, quelques résultats établis seront brièvement rappelés.

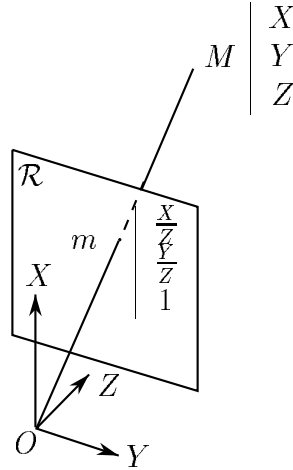
### 1.1 Le modèle de caméra

Dans toute la suite, nous supposons que la caméra obéit au modèle sténopé présenté à la figure 1.1. Dans ce modèle, la caméra est modélisée par un plan  $\mathcal{R}$  appelé rétine et par un point  $O$  appelé centre optique. La rétine  $\mathcal{R}$  est parallèle au plan  $(O, X, Y)$  et est située à la distance  $f$  de  $O$ . Cette distance est appelée distance focale. Quitte à effectuer un changement d'échelle sur les coordonnées  $(X, Y, Z)$ , il est toujours possible de supposer que  $f = 1$ .

Le repère  $(O, X, Y, Z)$  étant naturellement attaché à ce modèle de caméra, toutes les équations qui nécessiteront des coordonnées dans l'espace 3D seront écrites dans ce repère.

La transformation permettant d'obtenir le point  $\mathbf{m}$  image d'un point 3D  $\mathbf{M}$  est donc une projection perspective caractérisée par l'équation :

$$\mathbf{M} = Z\mathbf{m} \tag{1.1}$$

FIG. 1.1 - *Le modèle sténopé.*

Nous verrons que cette équation est fondamentale dans la mesure ou toutes les contraintes que nous écrirons découlent directement de cette équation.

Dans toute la suite, on notera par  $X, Y, Z$  les coordonnées d'un point 3D  $\mathbf{M}$ , par  $x, y$  les coordonnées de son image  $\mathbf{m}$  sur  $\mathcal{R}$  et par  $\tau$  le temps.

## 1.2 Notations

Considérons une courbe 3D ( $C$ ) qui se déplace dans l'espace. Cette courbe est paramétrisée par son abscisse curviligne  $S$  que nous supposons préservée par le mouvement (par exemple, le mouvement d'une corde inextensible ou d'un objet rigide au contraire du mouvement d'un objet élastique). On dira que ces mouvements sont des mouvements isométriques. Soit  $(c_\tau)$  l'image de  $(C)$  sur la retine  $\mathcal{R}$  à l'instant  $\tau$ . Si l'on considère l'espace tri-dimensionnel  $(x, y, \tau)$ , la famille des courbes  $(c_\tau)$  engendre dans cet espace une surface  $(\Sigma)$  définie par l'ensemble des points  $((c_\tau), \tau)$ . Par exemple, la figure 1.2 représente la surface engendrée par un cercle tournant devant la caméra autour de l'un de ses diamètres.



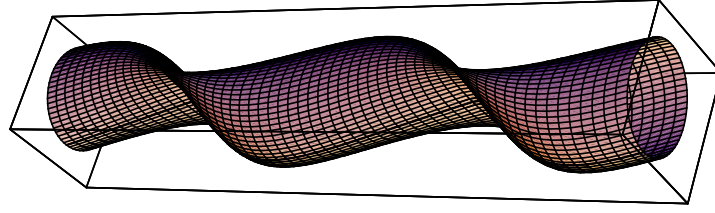


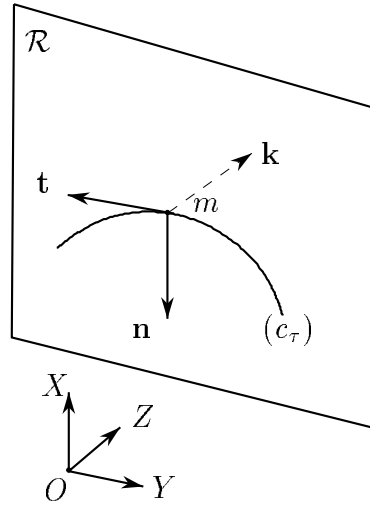
FIG. 1.2 - La surface spatio-temporelle engendrée par un cercle tournant devant la caméra.

A un instant donné,  $(c_\tau)$  peut être paramétrisée par son abscisse curviligne  $s$  : c'est l'ensemble des points  $\mathbf{m}(s, \tau)$  de la rétine. Mais,  $s$  est en fait une fonction de  $S$  et  $\tau$  :  $s(S, \tau)$ ,  $(c_\tau)$  peut donc également être paramétrisée par  $S$ . La fonction  $s(S, \tau)$  est, bien entendu, inconnue. Il est donc possible de paramétriser  $(\Sigma)$  de deux manières différentes soit par  $S$  et  $\tau$  soit par  $s$  et  $\tau$ .

Dans toute la suite de ce rapport, nous supposons que les fonctions  $\mathbf{m}(s, \tau)$  et  $s(S, \tau)$  sont suffisamment dérivables. De plus, en tout point  $\mathbf{m}$  de  $(c_\tau)$  on notera  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  le repère de Frenet local et  $\kappa$  la courbure (voir figure 1.3). Quand il s'agira de grandeurs liées à la surface spatio-temporelle, on utilisera le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$  où  $\boldsymbol{\tau}$  est un vecteur unitaire de l'axe des temps.

### 1.3 Définitions

Considérons les courbes tracées sur  $(\Sigma)$  passant par le point  $(\mathbf{m}_0(s_0, \tau_0), \tau_0)$  et définies respectivement par  $S = S_0 = \text{constante}$  et  $s = s_0 = \text{constante}$ . Comme montré sur la figure 1.4, ces courbes sont en général distinctes : en effet,  $S = S_0$  définit un point  $M_0$  de la courbe 3D ; la courbe sur  $(\Sigma)$  définie par  $S = S_0$  est donc, en fait, la trajectoire décrite par l'image du point  $M_0$ . La courbe de  $(\Sigma)$  définie par  $s = s_0$  s'interprète comme la trajectoire d'un point fictif de  $(c_\tau)$  coïncidant à l'instant  $\tau_0$  avec l'image de  $M_0$  mais évoluant par la suite de manière indépendante de  $M_0$ . Cette trajectoire n'a donc, a priori, aucune signification physique (elle dépend, par exemple, du choix de l'origine

FIG. 1.3 - *Définition du système de coordonnées locales.*

des abscisses curvilignes  $s$  à chaque instant  $\tau$ ). Pour cette raison, les courbes définies par  $S = \text{constante}$  seront appelées trajectoires réelles et seront notées  $(c_{m_0}^r)$  alors que celles définies par  $s = \text{constante}$  seront appelées trajectoires apparentes et seront notées  $(c_{m_0}^a)$ .

Il est cependant important de noter que, alors que les trajectoires apparentes sont parfaitement définies (à un choix d'origines prêt) à partir de l'observation des  $(c_\tau)$ , les trajectoires réelles sont, elles, inatteignables si on ne connaît pas la structure et la position de la courbe  $(C)$ .

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire :

**Définition 1** Soit  $(c)$  une courbe de  $\mathcal{R}$ .

On appelle champ de vecteur défini sur la courbe  $(c)$  l'application qui à tout point de  $(c)$  associe un vecteur de  $\mathcal{R}$ .

**Définition 2** On appelle champ de mouvement sur la courbe  $(c)$  tout champ de vecteur pour lequel le vecteur associé en tout point de  $(c)$  représente une vitesse.

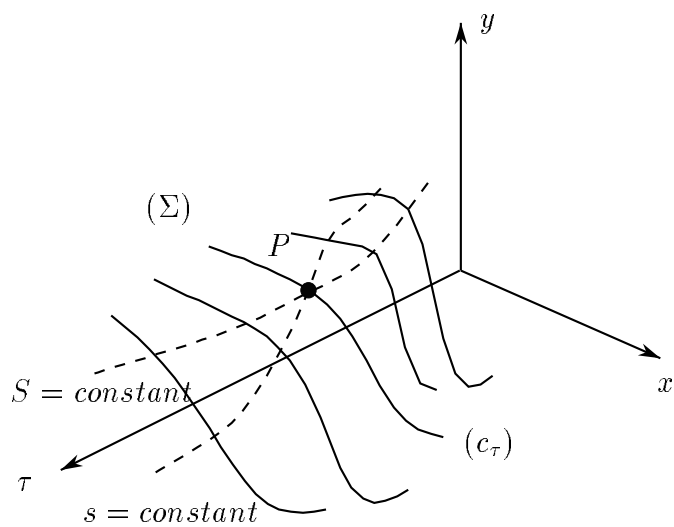


FIG. 1.4 - Les différents types de courbes qui peuvent être tracées sur la surface spatio-temporelle  $(\Sigma)$ .

Dans toute la suite de ce rapport, on supposera implicitement que les champs de mouvement sont définis sur la courbe  $(c_\tau)$ .

La définition précédente et la distinction entre les trajectoires réelles et apparentes permet de définir précisément deux *champs de mouvement*. Considérons la figure 1.5: le point  $\mathbf{m}$  sur  $(c_\tau)$  est l'image du point  $\mathbf{M}$  de  $C$ . On définit alors :

### Définition 3

- Le champ de mouvement réel  $\mathbf{v}_m^r$  ( $r$  pour réel) est la dérivée partielle de  $\mathbf{m}(s, \tau)$  par rapport au temps à  $S$  constante. Cette vitesse sera aussi notée  $\dot{\mathbf{m}}$  (dérivée totale de  $\mathbf{m}$  par rapport au temps). D'après la remarque sur les trajectoires réelles,  $\mathbf{v}_m^r$  est aussi la projection sur la rétine du vecteur vitesse 3D  $\mathbf{V}_M$  associé au point  $\mathbf{M}$  qui est défini par  $S = S_0$  et également la vitesse d'un point décrivant la trajectoire réelle  $(c_m^r)$ .
- Le champ de mouvement apparent  $\mathbf{v}_m^a$  ( $a$  pour apparent) est la dérivée partielle de  $\mathbf{m}(s, \tau)$  par rapport au temps à  $s$  constante. Cette vitesse sera également notée  $\mathbf{m}_\tau$ . C'est la vitesse d'un point suivant la trajectoire apparente  $(c_m^a)$ .

L'étude des relations qui existent entre ces deux champs de mouvement est primordiale puisque l'un,  $\mathbf{v}_m^a$ , est mesurable mais n'a aucune signification physique alors que l'autre,  $\mathbf{v}_m^r$ , qui contient toute l'information sur le mouvement 3D n'est pas atteignable directement à partir des images. La section suivante résume rapidement les résultats de cette étude ainsi que quelques notations qui seront utilisées dans la suite de ce rapport. Cette étude est effectuée en détail dans la section 3 de l'article [FP93] auquel on pourra se reporter pour plus de détails.

## 1.4 Résultats

Toute l'information disponible à propos du mouvement des points de  $(c_\tau)$  (et par conséquent toute l'information sur le mouvement 3D de  $(C)$  qu'il est

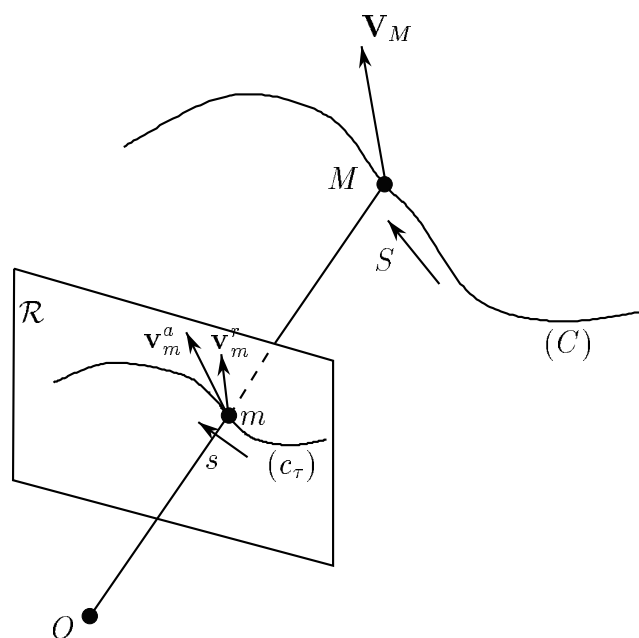


FIG. 1.5 - Définition des deux champs de mouvement : le champ réel et le champ apparent.

possible d'obtenir à partir des observations  $(c_\tau)$  est contenue dans la surface spatio-temporelle  $(\Sigma)$ . L'étude des deux formes fondamentales associées à tout point de cette surface permet d'énoncer les résultats suivants.

**Théorème 1** *En tout point  $\mathbf{m}$  de  $(c_\tau)$ , on a :  $\mathbf{v}_m^r \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_m^a \cdot \mathbf{n}$*

La relation exprimée par ce théorème est résumée par la figure 1.6 : elle signifie tout simplement que les composantes de long de la normale de  $\mathbf{v}_m^r$  et  $\mathbf{v}_m^a$  sont égales.

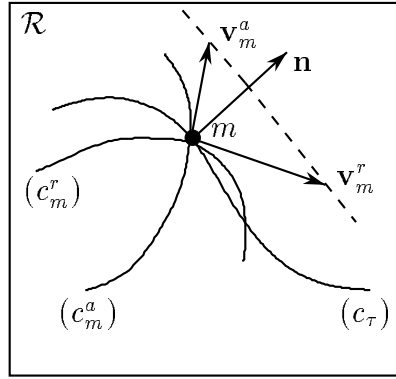


FIG. 1.6 - *Comparaison des deux champs de mouvement et les trajectoires réelles et apparentes liées au point  $\mathbf{m}$ .*

On écrira donc dans le repère de Frenet :

$$\mathbf{v}_m^a = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}_m^r = w \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} \quad (1.3)$$

$\beta$  est le *champ de mouvement normal*,  $\alpha$  est le *champ de mouvement apparent tangentiel* et  $w$  le *champ de mouvement réel tangentiel*.

**Théorème 2** *Soit  $\mathbf{m}$  un point de  $(c_\tau)$ , soit  $P = (\mathbf{m}, \tau)$  le point correspondant sur  $(\Sigma)$ . On note  $\mathbf{N}_P = [N_{\mathbf{t}}, N_{\mathbf{n}}, N_\tau]^T$  la normale à  $(\Sigma)$  au point  $P$ . On a :*

$$\beta = -\frac{N_\tau}{N_{\mathbf{n}}} \quad N_{\mathbf{t}} = 0$$

La normale à la surface spatio-temporelle  $(\Sigma)$  permet donc, directement, l'estimation du champ de mouvement normal  $\beta$ .

Notons maintenant  $\partial_{\mathbf{n}_\beta} f$  la dérivée d'une fonction  $f$  définie sur  $(\Sigma)$  dans la direction du vecteur  $\mathbf{n}_\beta = [\beta \mathbf{n}^T, 1]^T$  (voir figure 1.7 pour une interprétation géométrique de cette opération). On peut écrire les deux règles de dérivation suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial f}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} f \quad (1.4)$$

$$\dot{f} = w \frac{\partial f}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} f \quad (1.5)$$

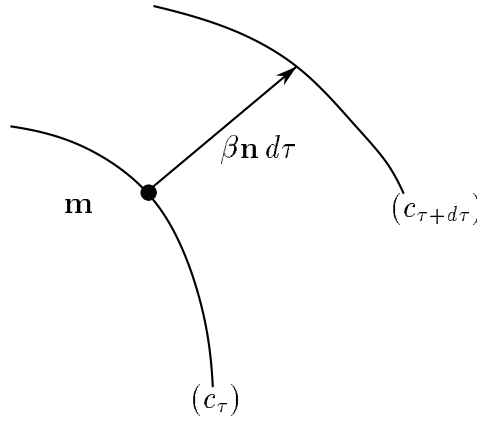


FIG. 1.7 - Une interprétation géométrique de  $\partial_{\mathbf{n}_\beta}$

**Théorème 3** On a les relations suivantes :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \kappa \beta \quad (1.6)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{n} = -\frac{\partial \beta}{\partial s} \mathbf{t} \quad (1.7)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_\beta} \kappa = \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + \kappa^2 \beta \quad (1.8)$$

L'équation 1.6 nous permet par intégration d'énoncer le résultat :

**Théorème 4** *Le champ de mouvement apparent tangentiel peut être estimé à partir du champ de mouvement normal à l'addition d'une fonction  $o(\tau)$  qui ne dépend que du temps.*

$$\alpha = \int_{s_0}^s \kappa(t, \tau) \beta(t, \tau) dt \quad (1.9)$$

*La fonction  $o(\tau)$  est directement liée au choix d'une origine pour l'abscisse curviligne à chaque instant  $\tau$ .*

Finalement, le théorème suivant provient de l'examen d'équations caractérisant totalement la surface spatio-temporelle à un déplacement près.

**Théorème 5** *Le champ de mouvement réel tangentiel ne peut pas être estimé à partir de la surface spatio-temporelle.*

Il est par conséquent impossible d'estimer le mouvement d'une courbe 3D animée d'un mouvement isométrique à partir des observations obtenues à l'aide d'une caméra. Pour résoudre ce problème, il faut *absolument* ajouter des hypothèses. Par exemple, on pourra supposer que le mouvement 3D est rigide. L'étude de ce cas particulier important sera l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Le cas d'une courbe 3D rigide en mouvement

Dans cette section, nous allons étudier comme annoncé le cas où la courbe 3D ( $C$ ) est rigide. Dans un premier temps, quelques notations liées aux mouvements des corps rigides seront introduites, puis nous verrons deux manières différentes d'obtenir les relations liant le champ des vitesses 3D aux paramètres mesurables à partir des images prises par une caméra. La comparaison de ces différentes équations nous permettra de voir qu'une seule d'entre elles suffit si l'on considère suffisamment de points. Enfin, nous terminerons cette section par l'étude de quelques cas particuliers donnant lieu à des équations beaucoup plus simples.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous utiliserons constamment le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$  décrit par la figure 1.3, la troisième coordonnée n'est donc plus une coordonnée temporelle comme pour l'étude de la surface spatio-temporelle mais une coordonnée spatiale le long de l'axe  $Z$ . Nous supposerons de plus que le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$  est orienté de manière à ce que  $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{k}$ .

## 2.1 Notations et résultats préliminaires

### 2.1.1 Le torseur cinématique

Le champ des vitesses 3D associé au mouvement d'un solide de l'espace (au sens physique du terme, c'est à dire un corps 3D rigide) peut être parfaitement décrit par la donnée en un point de l'espace que l'on suppose lié au solide d'un torseur appelé torseur cinématique. Dans la suite de ce rapport, nous considérerons toujours le torseur cinématique  $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V})$  défini au point  $O$  centre optique de la caméra.  $\boldsymbol{\Omega}$  est appelé vecteur rotation instantané et  $\mathbf{V}$  vecteur translation instantané.

On a alors les deux résultats classiques suivants :

**Proposition 1** *La vitesse  $\dot{\mathbf{M}}$  de tout point  $\mathbf{M}$  considéré comme lié au solide est donnée par :*

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{M} \quad (2.1)$$

*Pour tout vecteur de norme constante  $\mathbf{T}$  associé au solide, on a :*

$$\dot{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{T} \quad (2.2)$$

Nous allons, tout d'abord, étendre cette dernière équation au cas d'un vecteur 3D quelconque  $\mathbf{W}$  non nul.

Considérons le vecteur  $\mathbf{T}$  de norme 1 défini par :

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|}$$

On a donc :

$$\mathbf{W} = \|\mathbf{W}\| \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|} = \|\mathbf{W}\| \mathbf{T}$$

Ecrivons la dérivée temporelle de cette équation :

$$\dot{\mathbf{W}} = \|\dot{\mathbf{W}}\| \mathbf{T} + \|\mathbf{W}\| \dot{\mathbf{T}} \quad (2.3)$$

D'après l'équation 2.2, on sait que  $\dot{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|}$ . Par ailleurs, on a :

$$\|\mathbf{W}\| = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\|\dot{\mathbf{W}}\| = \frac{\dot{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|}$$

En remplaçant  $\dot{\mathbf{T}}$  et  $\|\dot{\mathbf{W}}\|$  par leurs valeurs dans l'équation 2.3, on obtient :

$$(\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})\dot{\mathbf{W}} - (\dot{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{W})\mathbf{W} + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})\mathbf{W} \wedge \Omega = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})(\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \wedge \Omega) - (\dot{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{W})\mathbf{W} = \mathbf{0}$$

En reconnaissant  $\mathbf{W} \wedge (\dot{\mathbf{W}} \wedge \mathbf{W})$  dans le premier membre, on obtient :

$$\mathbf{W} \wedge (\dot{\mathbf{W}} \wedge \mathbf{W} + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})\Omega) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Effectuons le produit vectoriel de cette dernière équation avec  $\mathbf{W}$ , comme  $\mathbf{W}$  est non nul,  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \neq 0$  et on obtient donc :

$$\mathbf{W} \wedge (\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \wedge \Omega) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Les équations (2.4) et (2.5) sont équivalentes puisque la première implique la seconde et puisque en développant le premier terme de (2.6), on obtient :

$$\mathbf{W} \wedge \dot{\mathbf{W}} + (\mathbf{W} \cdot \Omega)\mathbf{W} - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})\Omega = \mathbf{0}$$

et en effectuant le produit vectoriel de cette équation avec  $\mathbf{W}$  on retombe sur l'équation (2.4).

Finalement, on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2** *Pour tout vecteur  $\mathbf{W}$  associé au solide, on a :*

$$\mathbf{W} \wedge (\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \wedge \Omega) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

Nous allons maintenant appliquer ces équations fondamentales au cas qui nous intéresse afin d'obtenir les équations qui relient les paramètres mesurables à l'aide d'une caméra au torseur cinématique associé à la courbe rigide observée.

### 2.1.2 Problèmes de tangentes

Considérons la situation décrite par la figure 2.1.

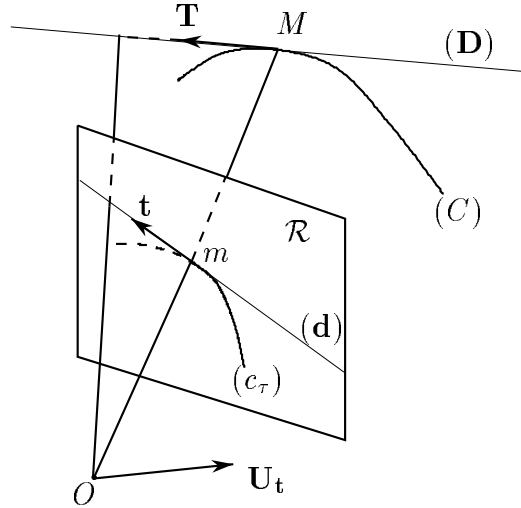


FIG. 2.1 - *Relation entre  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{T}$ .*

Nous allons nous intéresser ici à décrire la relation qui lie la tangente 3D  $(\mathbf{D})$  à la courbe  $(C)$  au point  $\mathbf{M}$  à la tangente  $(\mathbf{d})$  à la courbe  $(c_\tau)$  en  $\mathbf{m}$ . Cette relation est en fait très simple : il suffit de remarquer que  $(\mathbf{d})$  est l'image sur la rétine  $\mathcal{R}$  de  $(\mathbf{D})$ . Dès lors les droites  $(\mathbf{d})$ ,  $(\mathbf{D})$  et le centre optique de la caméra  $O$  sont dans un même plan. Comme les vecteurs  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{t}$  sont dans ce plan, le vecteur  $\mathbf{U}_t = \mathbf{m} \wedge \mathbf{t}$  est orthogonal à celui-ci. Mais alors, puisque  $\mathbf{D}$  est également dans ce plan, on a :

$$\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_t = 0 \quad (2.8)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous aurons besoin de dériver  $\mathbf{U}_t$  par rapport au temps. En utilisant la règle de dérivation (1.5), on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{t}} = w \frac{\partial \mathbf{U}_{\mathbf{t}}}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{U}_{\mathbf{t}}$$

Or  $\frac{\partial \mathbf{U}_{\mathbf{t}}}{\partial s} = \kappa \mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ , introduisons donc la notation  $\mathbf{U}_{\mathbf{n}} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ . Ecrivons maintenant :

$$\partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{U}_{\mathbf{t}} = \partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{m} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{m} \wedge \partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{t}$$

Il est facile de vérifier que  $\partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{t} = \frac{\partial \beta}{\partial s} \mathbf{n}$  et  $\partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{m}$  s'obtient de la façon suivante :

Par définition :  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{v}_r = w \mathbf{t} + \beta \mathbf{n}$ .

Par ailleurs en utilisant la règle de dérivation (1.5)  $\dot{\mathbf{m}} = w \mathbf{t} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{m}$

On en déduit donc que :

$$\partial_{\mathbf{n}_\beta} \mathbf{m} = \beta \mathbf{n}$$

Finalement :

**Proposition 3**

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{t}} = (\kappa w + \frac{\partial \beta}{\partial s}) \mathbf{U}_{\mathbf{n}} - \beta \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \quad (2.9)$$

Nous aurons également besoin de la dérivée temporelle seconde de  $\mathbf{U}_{\mathbf{t}}$ . En utilisant encore la règle de dérivation (1.5), on obtient à partir de l'équation (2.9) :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{t}} = (w^2 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + w(\partial_{\mathbf{n}_\beta} \kappa + \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}) + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \kappa \dot{w}) \mathbf{U}_{\mathbf{n}} + (\kappa w + \frac{\partial \beta}{\partial s}) \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - (w \frac{\partial \beta}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta) \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$$

et comme

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} = -(\kappa w + \frac{\partial \beta}{\partial s}) \mathbf{U}_{\mathbf{t}} + w \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \quad (2.10)$$

on obtient la proposition suivante :

**Proposition 4**

$$\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{t}} = (w^2 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + w(\partial_{\mathbf{n}_\beta} \kappa + \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}) + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \kappa \dot{w}) \mathbf{U}_{\mathbf{n}} - (\kappa w + \frac{\partial \beta}{\partial s})^2 \mathbf{U}_{\mathbf{t}} + (\kappa w^2 - \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta) \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \quad (2.11)$$

Remarquons que les valeurs de  $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{t}}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{t}}$  font intervenir  $w$  et  $\dot{w}$  que nous savons n'être pas calculables dans le cas général des mouvements isométriques. L'objet de la section suivante est donc de montrer comment il est possible de déterminer ces grandeurs dans le cas qui nous intéresse ici : les mouvements rigides.

## 2.2 Les équations cinématiques

Regardons quelles sont les conséquences de l'équation perspective (1.1) dans le cas d'un mouvement rigide. En prenant la dérivée totale de cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$V_{M_Z} \mathbf{m} + Z(w\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}) = \mathbf{V}_M \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{V}_M$  est le vecteur vitesse 3D du point  $M$ . Cette grandeur n'est donc autre que  $\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{M}$ . Projetons cette équation vectorielle sur les directions définies par  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$ . On obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$Z(w + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{b}) = V_t - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{t})V_Z = -\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V} \quad (2.13)$$

$$Z(\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}) = V_n - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})V_Z = \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V} \quad (2.14)$$

où les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont définis par :

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{U}_t \quad (2.15)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{U}_n \quad (2.16)$$

On a noté  $V_t = \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}$ ,  $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ .

Ces deux équations sont absolument fondamentales : elles permettent de relier le mouvement 3D qui est inconnu aux champs de mouvement 2D observés. Nous allons en tirer une méthode permettant d'exprimer  $w$  en fonction de  $\beta$  et du torseur cinématique  $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V})$ .

Ecrivons en effet le rapport membre à membre des équations (2.13) et (2.14) en tout point où  $\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V} \neq 0$ , on obtient :

$$w = (\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a})f(\mathbf{V}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{b} \quad (2.17)$$

où :

$$f(\mathbf{V}) = -\frac{\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}} \quad (2.18)$$

Notons que dans cette relation  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{V}$  sont des inconnues. Nous avons cependant gagné énormément en exprimant la grandeur  $w$  qui dépend du point de la courbe ( $c_\tau$ ) considéré en fonction de la grandeur  $\beta$  qui dépend également du point de la courbe ( $c_\tau$ ) considéré mais qui est mesurable d'après le théorème 2 et des grandeurs  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{V}$  qui sont identiques pour tous les points de la courbe.

Il est maintenant aisé d'obtenir  $\dot{w}$  : en appliquant la règle de dérivation (1.5) à l'équation (2.17), on a :

$$\dot{w} = (w \frac{\partial \beta}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\mathbf{a}})f(\mathbf{V}) + (\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a})\dot{f}(\mathbf{V}) - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{b} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\mathbf{b}} \quad (2.19)$$

Des équations (2.15) et (2.16), on tire :

$$\dot{\mathbf{a}} = (w\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}) \wedge \mathbf{U}_t + \mathbf{m} \wedge \dot{\mathbf{U}}_t$$

et

$$\dot{\mathbf{b}} = (w\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}) \wedge \mathbf{U}_n + \mathbf{m} \wedge \dot{\mathbf{U}}_n$$

D'après les valeurs obtenues pour  $\dot{\mathbf{U}}_t$  et  $\dot{\mathbf{U}}_n$  (équations (2.9) et (2.10)), on a :

$$\dot{\mathbf{a}} = (w\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}) \wedge \mathbf{U}_t + (\kappa w + \frac{\partial \beta}{\partial s})\mathbf{b} - \beta\mathbf{m} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = (w\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}) \wedge \mathbf{U}_n - (\kappa w + \frac{\partial \beta}{\partial s})\mathbf{a} + w\mathbf{m} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) \quad (2.21)$$

Enfin  $\dot{f}(\mathbf{V})$  est d'après sa définition :

$$\dot{f}(\mathbf{V}) = \frac{(\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{U}_t + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{U}}_t)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_n) - (\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{U}_n + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{U}}_n)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_t)}{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_t)^2} \quad (2.22)$$

Remarquons que grâce aux équations qui ont été dérivées dans cette section, il est possible d'exprimer toutes les grandeurs que nous avons introduites ( $\mathbf{U}_t$ ,  $\mathbf{U}_n$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_t$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_n$ ) uniquement en fonction de  $\beta, \frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}, \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta, \partial_{\mathbf{n}_\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s}, \kappa, \frac{\partial \kappa}{\partial s}$  et  $\partial_{\mathbf{n}_\beta} \kappa$  qui sont des grandeurs mesurables dans l'image et en fonction de  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  qui sont des grandeurs constantes le long de la courbe ( $c_\tau$ ).

L'objet des sections suivantes est de montrer qu'il est, en fait, possible de calculer  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  à partir des images.

## 2.3 Les équations “géométriques”

Ces équations sont appelées géométriques car elles proviennent directement de l'observation des caractéristiques géométriques liées à la courbe que sont les tangentes à la courbe. En fait, ce jeu d'équations provient d'une analogie avec les équations que l'on peut écrire dans le cas où la courbe ( $C$ ) est une droite. Nous ne développerons pas ici ce cas particulier qui est expliqué en détails dans [FP93], mais il est important de garder à l'esprit cette origine.

### 2.3.1 L'équation au point

L'équation (2.8) étant vraie à tout instant, par dérivation par rapport au temps on obtient :

$$\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{M} + \mathbf{U}_t \cdot \dot{\mathbf{M}} = 0 \quad (2.23)$$

En remplaçant  $\dot{\mathbf{M}}$  par sa valeur issue de l'équation (2.1), on a :

$$(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U}_t + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}}_t = 0$$

Cette équation étant également vraie à chaque instant, il est aussi possible de la dériver par rapport au temps. Pour cela, introduisons ( $\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \dot{\mathbf{V}}$ ) les dérivées temporelles de ( $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}$ ). On obtient :

$$\dot{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t) + \mathbf{M} \cdot (\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t) + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{U}_t + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{U}}_t = 0$$

En utilisant les équations (2.1) et (1.1), on trouve :



$$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + 2\dot{\mathbf{U}}_t) + Z\mathbf{m} \cdot (\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t)) + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{U}_t = 0 \quad (2.24)$$

Or, il est possible de réécrire l'équation (2.23) en utilisant l'équation (1.1) pour éliminer  $\mathbf{M}$  et le remplacer par  $Z\mathbf{m}$ .

$$Z\mathbf{m} \cdot (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_t = 0 \quad (2.25)$$

En éliminant  $Z$  entre les équations (2.24) et (2.25), on trouve le résultat suivant :

**Théorème 6** *En tout point de  $(c_\tau)$ , on peut écrire l'équation scalaire suivante :*

$$[\mathbf{m} \cdot (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t)][\mathbf{V} \cdot (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + 2\dot{\mathbf{U}}_t) + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{U}_t] - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_t)[\mathbf{m} \cdot (2\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{U}_t)\boldsymbol{\Omega})] = 0 \quad (2.26)$$

Cette équation provient directement de l'étude du mouvement d'un point sur la courbe; pour cette raison nous l'appellerons l'équation au point.

### 2.3.2 L'équation à la tangente

L'équation (2.7) étant vraie à tout instant, par dérivation par rapport au temps on obtient :

$$\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{T} + \mathbf{U}_t \cdot \dot{\mathbf{T}} = 0$$

En remplaçant  $\dot{\mathbf{T}}$  par sa valeur issue de l'équation (2.2), on a :

$$\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{T} + (\mathbf{U}_t, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T}) = 0$$

où  $(\mathbf{U}_t, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T})$  est le déterminant des trois vecteurs  $\mathbf{U}_t$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{T}$ . En utilisant les propriétés standard des déterminants, on peut réécrire cette équation en :

$$\mathbf{T} \cdot (\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega}) = 0$$

Cette équation ainsi que l'équation (2.2) montrent que  $\mathbf{T}$  est orthogonal aux deux vecteurs  $\mathbf{U}_t$  et  $\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega}$  et est, par conséquent, proportionnel au produit vectoriel de ces deux vecteurs.

Introduisons donc  $\mathbf{W}$ , le vecteur de même direction que  $\mathbf{T}$  et défini par :

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}_t \wedge (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t) \quad (2.27)$$

D'après la section 2.1.1,  $\mathbf{W}$  doit vérifier l'équation (2.6).

Regardons comment cette équation se transforme dans ce cas particulier. Commençons par évaluer le terme  $\mathbf{W} \wedge \boldsymbol{\Omega}$  en utilisant l'équation (2.27) :

$$\mathbf{W} \wedge \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{U}_t \wedge (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t)) \wedge \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{U}_t \cdot \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{U}}_t) - (\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{U}_t$$

Évaluons maintenant  $\dot{\mathbf{W}}$  toujours en utilisant (2.27) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= \dot{\mathbf{U}}_t \wedge (\mathbf{U}_t \wedge \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{U}_t \wedge (\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t) \\ &= (\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{U}_t - (\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{U}_t)\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge (\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t) \end{aligned}$$

On reconnaît dans les deux premiers termes le produit  $\mathbf{U}_t \wedge (\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega})$ , on obtient donc :

$$\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{U}_t \wedge (2\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t + (\mathbf{U}_t \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega})$$

Finalement, on a :

$$\mathbf{W} \wedge (\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \wedge \boldsymbol{\Omega}) = [\mathbf{W} \cdot (2\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t + (\mathbf{U}_t \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega})]\mathbf{U}_t = \mathbf{0}$$

puisque  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_t = 0$ .

**Théorème 7** *En tout point de  $(c_\tau)$ , on peut écrire l'équation scalaire suivante :*

$$\mathbf{W} \cdot (2\dot{\mathbf{U}}_t \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_t \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\mathbf{U}}_t + (\mathbf{U}_t \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad (2.28)$$

Cette équation provient directement de l'étude du mouvement de la direction de la tangente, c'est pourquoi nous l'appellerons équation à la tangente.

Il serait naturel de se poser la question de savoir si les directions associées aux normales et bi-normales de la courbe 3D permettent d'écrire d'autres relations que celle écrite ci-dessus. En fait, il est possible de montrer qu'il n'en est rien. Une preuve complète de ce fait peut être trouvée dans [Fau93]. Des éléments de preuve sont donnés dans [FP93].

### 2.3.3 Conclusion

En conclusion de cette section, nous allons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 8** *En tout point de la courbe  $(c_\tau)$  il est possible d'écrire deux équations polynômiales en les coordonnées de  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\dot{\mathbf{\Omega}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$ . Les coefficients de ces équations sont des polynômes des quantités*

$$\beta \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \quad \frac{\partial \beta}{\partial \kappa} \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial \kappa^2} \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad \frac{\partial \beta}{\partial \kappa}$$

*qui peuvent être mesurées à partir de la surface spatio-temporelle  $(\Sigma)$ .*

*Ces deux équations sont homogènes en  $(\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}})$  de degré 2 pour la première et 4 pour la deuxième. Le degré total de la première équation est 4, 6 pour la seconde. Les degrés en  $\mathbf{V}$  sont 2 pour la première et 4 pour la seconde. Les degrés en  $(\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{\Omega}})$  sont 2 pour la première équation et 2 pour la deuxième. Les deux équations sont linéaires en  $\dot{\mathbf{V}}$  et  $\dot{\mathbf{\Omega}}$ .*

Ces équations sont obtenues tout simplement en remplaçant dans les équations (2.26) et (2.28) les valeurs obtenues dans les sections 2.1.2 et 2.2, en prenant le numérateur du résultat ainsi obtenu et en supprimant tout facteur non nul éventuel. Ce faisant, nous combinons les informations géométriques liées à la structure de  $(C)$  (équations (2.26) et (2.28) avec les grandeurs de la section 2.1.2) avec les informations purement cinématiques de la section 2.2.

Remarquons que l'homogénéité des équations en  $(\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}})$  interdit tout espoir de récupérer les normes de ces deux vecteurs. Seuls peuvent être atteintes les directions de ces deux vecteurs. Cela est tout à fait normal et correspond au fait qu'il est toujours possible d'effectuer une homothétie de centre  $O$  (le centre optique) sans changer les mesures les vitesses et profondeurs étant elles proportionnelles au rapport de l'homothétie.

A la lumière du théorème précédent, une question naturelle vient à l'esprit :

*Etant donnée une surface spatio-temporelle  $(\Sigma)$ , combien d'équations en  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\dot{\mathbf{V}}$ ,  $\dot{\mathbf{\Omega}}$  peut on écrire à l'aide du théorème précédent.*

Par exemple, dans le cas où la courbe observée est une droite la réponse est 2. Nous verrons ultérieurement qu'il est difficile de répondre à cette question dans le cas général.

En ignorant le problème précédent et comme  $N$  points fournissent  $2N$  équations en les inconnues  $\Omega$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\dot{\Omega}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$ , il est possible de construire un système ayant un nombre fini de solutions à un facteur d'échelle près pour  $\mathbf{V}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$ . Cela nous amène à émettre la conjecture suivante :

**Conjecture 1** *Le torseur cinématique  $(\Omega, \mathbf{V})$  et sa dérivée temporelle  $(\dot{\Omega}, \dot{\mathbf{V}})$  d'une courbe 3D rigide peuvent, en général, être estimés à partir de l'observation de la surface spatio-temporelle engendrée par son image dans la rétine en résolvant un système d'équations polynômiales. La profondeur peut être estimée en chaque point à un facteur d'échelle près à l'aide de l'équation (2.14). La tangente à la courbe 3D peut être retrouvée à partir de l'équation (2.27). De même, il est possible de retrouver la normale et la bi-normale.*

Bien entendu, cette conjecture est fausse dans certains cas particuliers comme par exemple les droites [FDN89] ou les spirales logarithmiques. Un catalogue de situations ambiguës peut être trouvé dans [Ber89].

Notons aussi que nous avons beaucoup plus d'équations que d'inconnues. Quand on observe vraiment une courbe rigide 3D, on a un système composé (en théorie) d'une infinité de polynômes *ayant au moins une solution*. Cette situation est assez exceptionnelle : en général, un système polynômial à  $p$  équations et à  $n < p$  inconnues n'admet pas de solutions. Il convient de profiter de cette situation exceptionnelle autant que possible afin de réduire au maximum le nombre des solutions à considérer.

L'objet de la section suivante est de montrer une autre méthode permettant d'aboutir à ces équations et de clarifier ainsi les relations existant entre (2.26) et (2.28). Pour ce faire, nous allons abandonner toute intuition géométrique pour ne regarder plus que l'aspect algébrique sous-jacent.

## 2.4 Les équations algébriques

A la vue des résultats précédent, il est possible de remarquer que les seules relations qui sont à la base des équations de la section précédente sont :

- Les équations de la cinématique 3D (2.1) et (2.2).

– L'équation de perspective (1.1).

Dès lors, pourquoi ne pas essayer de retrouver les équations précédentes directement à partir de ces relations?

### 2.4.1 De nouvelles équations?

Considérons à nouveau les équations (2.13) et (2.14). Ces deux équations sont, à l'opération de dérivation près, des conséquences purement algébriques des équations (2.1), (2.2) et (1.1).

Prenons l'équation (2.14) et dérivons la une fois de plus par rapport au temps. On obtient :

$$V_{M_z}(\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}) + Z(\dot{\beta} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\mathbf{a}}) = (\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U}_t \cdot \dot{\mathbf{V}})$$

Or, d'après les équations (2.1) et (1.1), on a :

$$V_{M_z} = V_M \cdot \mathbf{k} = V_Z + Z(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$$

où  $V_Z = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}$  et  $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$  désigne le produit mixte de  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$ .

De plus, d'après la règle de dérivation (1.5) :

$$\dot{\beta} = w \frac{\partial \beta}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta$$

On trouve donc :

$$(V_Z + Z(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{m}, \mathbf{k}))(\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}) + Z(w \frac{\partial \beta}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\mathbf{a}}) = (\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U}_t \cdot \dot{\mathbf{V}})$$

En éliminant  $Z$  à l'aide de l'équation (2.14), on obtient :

$$V_Z(\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a})^2 + \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}(\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}(w \frac{\partial \beta}{\partial s} + \partial_{\mathbf{n}_\beta} \beta - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\mathbf{a}}) - (\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a})(\dot{\mathbf{U}}_t \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U}_t \cdot \dot{\mathbf{V}}) = 0 \quad (2.17)$$

$w$  étant toujours donné par l'équation (2.17), on a donc une équation liant  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ,  $\dot{\mathbf{V}}$  aux mesures faites dans l'image. En fait, cette équation n'est pas

nouvelle. En effet, il est possible de démontrer que cette dernière équation n'est autre, à un facteur multiplicatif non nul près, que l'équation au point (2.26) que l'on vient donc de retrouver directement à partir des équations (2.13) et (2.14). Il convient de noter que cette dernière formulation de (2.26) permet de voir immédiatement que les paramètres  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}$ ,  $\partial_{\mathbf{n}_\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \kappa}{\partial s}$  et  $\partial_{\mathbf{n}_\beta} \kappa$  n'interviennent pas. De plus, il est intéressant de noter qu'en faisant un calcul similaire au précédent mais en partant de (2.13) au lieu de (2.14), on retrouve encore l'équation (2.26). Cette équation est donc la seule qu'il est possible d'obtenir de cette manière.

Mais, cette équation étant vraie pour tout les point de la courbe  $(c_\tau)$ , il est possible de la dériver par rapport à  $s$ . On obtient ainsi une nouvelle équation  $L_2(\Omega, \mathbf{V}, \dot{\Omega}, \dot{\mathbf{V}}) = 0$  qui fait intervenir toutes les mesures intervenant dans le théorème 8. Cette équation est simplement obtenue en dérivant par rapport à  $s$  tous les coefficients de (2.26). Elle a donc les mêmes propriétés de degrés que (2.26). Comme elle fait intervenir de nouvelles mesures et qu'elle n'est pas factorisable (tout comme (2.26)), l'équation  $L_2$  est forcément différente de (2.26). De plus, comme ses propriétés de degré sont différentes de celles de l'équation (2.28), on peut en déduire que  $L_2$  n'est pas identique à celle-ci.

A t-on trouvé une nouvelle équation? Il s'agit d'être prudent car la réponse est assez complexe :

- Si on ne considère que la forme des équations alors la réponse est oui. Malheureusement, ceci n'a pas de sens ici puisque seules les solutions du système de polynôme nous intéressent ici et qu'on sait que dans ce cas l'objet mathématique intéressant est l'idéal engendré par nos équations polynômiales et qu'un même idéal peut être engendré à partir de systèmes de polynômes générateurs différents.
- Si on considère les zéros du système de polynômes (c'est à dire qu'on va étudier l'idéal engendré par ces 3 polynômes), nous allons voir dans la section suivante que la réponse est non. En fait, les 3 équations ne sont pas indépendantes et il est possible d'écrire une relation linéaire entre elles. Il ne sera donc jamais nécessaire de considérer l'équation (2.28) dans nos systèmes d'équations (on supprime cette équation car c'est la plus compliquée).

- Si maintenant on considère que la courbe observée est une courbe algébrique<sup>1</sup>, alors on se rend compte qu'il est possible de remplacer l'examen des dérivées par rapport à  $s$  par l'examen d'un plus grand nombre de points. Donc, en admettant le résultat relatif à la relation entre les 3 polynômes énoncé ci-dessus, on s'aperçoit qu'il n'est pas non plus nécessaire de considérer l'équation  $L_2$  qui est tout simplement la dérivée de (2.26). Cela est d'autant plus avantageux que (2.26) ne dépend que des dérivées seconde sur  $(\Sigma)$  et pas des dérivées troisième comme  $L_2$  et (2.28).

### 2.4.2 Comment 3 équations n'en font que 2 ...

Trouver la relation reliant (2.28) à (2.26) et  $L_2$  est un travail assez difficile. En effet, les méthodes générales de calcul formel permettant de trouver des relations entre des polynômes échouent vu la taille de nos trois polynômes. Il est cependant possible de vérifier cette relation avec de tels outils. Comme démontrer cette relation à partir des expressions algébriques de nos équations semble une tâche ardue voire impossible, nous nous contenterons de donner ici la relation ainsi qu'une idée sur la manière de l'obtenir.

Commençons par renommer les équations (2.26) et (2.28) respectivement en  $L_1$  et  $L_3$ . Les indices  $i = 1, 2, 3$  ont été choisis par ordre de complexité croissante de l'équation  $L_i$ .

Si l'on sait (ou que l'on suppose) qu'une relation existe entre  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , alors cette relation est également vraie sur chaque terme de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ . Une manière de trouver cette relation est donc de considérer certains termes simples de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , trouver la relation entre ces termes et essayer de généraliser celle-ci aux polynômes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  complets.

Dans notre cas, il suffit de regarder les termes de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  contenant les composantes de  $\dot{\mathbf{\Omega}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$ . Il est possible de construire des combinaisons linéaires de ces termes ayant toutes un facteur commun qui n'interviendra donc pas dans la relation. On peut dès lors diviser ces combinaisons linéaires

---

1. on pourra toujours supposer cela puisque la caméra fournit un ensemble de points discrets sur la courbe et qu'il est toujours possible de faire passer une courbe algébrique par l'ensemble de tous les points de la courbes et ce faisant on ne perd pas d'informations

par ce facteur commun et trouver à l'aide d'une méthode de bases de Gröbner (celle implémentée dans Maple dans notre cas) la relation.

Il se trouve que la relation entre les termes induite par celle trouvée entre les combinaisons linéaires est la même que la relation entre  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , ce qui est vérifiable par calcul formel.

On a donc la relation suivante :

$$L_3 = (\kappa \mathbf{V}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Omega} - \frac{\partial \beta}{\partial s} \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V} - 2\kappa \beta \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V} - \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}(\mathbf{U}_t, \mathbf{t}, \mathbf{\Omega})) L_1 + \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}(\beta - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{a}) L_2 \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{Q}$  est une matrice donnée par :

$$\begin{bmatrix} -2y\mathbf{t}_x\lambda - \mu y\mathbf{t}_y + 2\mathbf{t}_x^2 - \mathbf{t}_y^2 & -2y\mathbf{t}_y\lambda + 3\mu\lambda + y\mathbf{t}_x\mu + 3\mathbf{t}_x\mathbf{t}_y & -2\mathbf{t}_x\mu + \mathbf{t}_y\lambda \\ y\mathbf{t}_x\mu - 2y\mathbf{t}_y\lambda + 3\mathbf{t}_x\mathbf{t}_y & \mu y\mathbf{t}_y - \mu^2 + 2y\mathbf{t}_x\lambda + 2\lambda^2 + 2\mathbf{t}_y^2 - \mathbf{t}_x^2 & -\mathbf{t}_x\lambda - 2\mathbf{t}_y\mu \\ -2\mathbf{t}_x\mu + \mathbf{t}_y\lambda + 3y\lambda\mu & -3x\lambda\mu - 2\mathbf{t}_y\mu - \mathbf{t}_x\lambda & 2\mu^2 - \lambda^2 \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{t} = [\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, 0]^T$  et avec les notations  $\lambda = x\mathbf{t}_y - y\mathbf{t}_x$  et  $\mu = x\mathbf{t}_x + y\mathbf{t}_y$ .

Finalement, on a donc démontré que l'idéal engendré par  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  est identique à l'idéal engendré par seulement  $L_1$  et  $L_2$ . Cela signifie que l'équation  $L_3$  n'apporte aucune information supplémentaire qui ne serait pas déjà contenue dans les équations  $L_1$  et  $L_2$ . A la lumière de ce résultat, et en se souvenant que  $L_2$  n'est rien d'autre que la dérivée de  $L_1$  par rapport à  $s$ , il est possible de reformuler le théorème 8.

**Théorème 9** *En tout point de la courbe  $(c_\tau)$  il est possible d'écrire une équation polynômiale en les coordonnées de  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\dot{\mathbf{\Omega}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$ . Les coefficients de ces équations sont des polynômes des quantités*

$$\beta \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad \frac{\partial \mathbf{n}_\beta}{\partial s} \beta$$

*qui peuvent être mesurées à partir de la surface spatio-temporelle  $(\Sigma)$ .*

*Cette équation est homogène en  $(\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}})$  de degré 2. Elle est de degré 2 en  $(\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{\Omega}})$  et de degré total 4. Nous appellerons cette équation, l'équation à l'ordre*



2 car elle ne fait intervenir que des mesures d'ordre au plus 2 sur la surface spatio-temporelle.

**Démonstration :** Cette équation n'est autre que  $L_1$ .  $\square$

**Corollaire 1** *En tout point de la courbe  $(c_\tau)$ , il existe au moins une équation à l'ordre  $n$  (équation ne faisant intervenir que des mesures d'ordre au plus  $n$  avec au moins une mesure d'ordre  $n$ ) pour tout  $n \geq 2$ .*

**Démonstration :** Cette équation est tout simplement la dérivée de  $L_1$  par rapport à  $s$   $n - 2$  fois.  $\square$

### 2.4.3 Eliminations

Dans toute la suite de ce rapport, nous ne prendrons plus en compte que l'équation  $L_1$  et cela pour deux raisons :

- Le calcul de dérivées à partir des images est un exercice coûteux et d'autant plus périlleux que l'ordre de dérivation est élevé. Généralement, il est difficile d'obtenir avec une bonne précision des dérivées d'ordre supérieur à 2 avec des images  $512 \times 512$ . Ces considérations s'appliquent aux dérivées spatiales, les dérivées temporelles étant encore plus difficiles à obtenir pour des raisons que nous essayerons d'expliquer au chapitre 4 (voir également ce chapitre pour des exemples de calculs de dérivées spatiales et temporelles aux ordres 1 et 2).
- Compte tenu de la remarque sur les courbes algébriques faite à la section précédente, il ne semble pas nécessaire en pratique d'avoir à considérer les équations autres que  $L_1$  si on prend en compte un nombre suffisamment élevé de points.

Pour se convaincre du fait qu'il suffit de considérer l'équation (2.26) en tout les points d'une courbe algébrique, vérifions que cela est bien possible dans le cas d'une droite. On sait qu'une droite donne lieu à exactement deux équations lorsqu'on ne considère que les dérivées temporelles à l'ordre 2. Ces deux équations ne sont autres que les équations géométriques (2.26) et (2.28)

(cela est normal puisqu'on s'est inspiré pour dériver les équations géométriques du cas des droites). Dans ce cas, l'équation (2.28) est indépendante du point de la droite où on l'écrit puisque elle ne fait intervenir que l'information de la direction de la tangente et que celle-ci est constante le long de la droite. L'équation au point dépend elle du point auquel on la considère, mais, si on exprime cette équation en deux points distincts de la droite, alors l'équation obtenue en faisant la différence entre ces deux équations n'est autre que l'équation (2.28). Exprimer (2.26) en deux points est équivalent à exprimer (2.26) et (2.28) en un seul point. De plus, cette construction est indépendante des deux points de la droite considérés.

Une manière équivalente de faire cette vérification est d'écrire les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'équation de la droite observée et l'équation (2.26) soient simultanément nulles en tout point de la droite. Pour faire cela, comme ces deux équations sont polynômiales, il est possible d'utiliser la méthode d'élimination : en éliminant l'une des variables de position  $x$  et  $y$  (par exemple  $y$ ) entre l'équation de la droite et l'équation  $L_1$ , il reste un polynôme en une seule variable ( $x$ ). Ecrire que ce polynôme est nul en tous les points de la droite, c'est écrire que tous les coefficients de ce polynôme sont nuls. Or ces coefficients sont maintenant indépendants de  $x$  et  $y$  (on a introduit à la place les coefficients intervenant dans l'équation algébrique). On a donc ainsi un ensemble d'équations qui relient l'observation globale de la droite image au mouvement de la droite 3D.

L'avantage de la méthode précédente est de pouvoir être généralisée à tout type de courbe image. L'avantage de tels systèmes d'équations est de prendre en compte globalement la courbe, ce qui conduit, dans les cas où l'on connaît a priori la courbe observée, à une solution plus stable avec des systèmes de polynômes de taille ne dépendant pas du nombre de points sur la courbe observée que ceux obtenus en exprimant l'équation  $L_1$  en tous les points de la courbe.

Il faut néanmoins être conscient de deux choses :

- Ces équations ont tendance à être très grosses, et il est difficile de les obtenir même à l'aide du calcul formel.

- En général, on n'a aucune garantie sur l'indépendance des équations ainsi obtenues. On n'obtient donc pas forcément les systèmes de polynômes les plus petits possibles.

Pour donner un exemple, l'équation  $L_1$  appliquée au cas où la courbe observée est une conique donne lieu à 17 équations. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il y a de fortes présomptions pour que ces équations ne soient pas indépendantes (mais toute tentative pour trouver une relation générale entre elles s'est soldée par un échec).

Dans tous les cas, l'étape finale consiste à résoudre un système de polynômes. Nous verrons que cela n'est pas forcément une tâche aisée et qu'il est extrêmement intéressant d'envisager des cas particuliers pratiques afin de faciliter cette résolution. L'étude de quelques uns de ces cas conduisant à des systèmes plus simple à appréhender fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Etude de quelques cas particuliers de mouvements rigides

Ce chapitre a pour but l'étude d'un certain nombre de cas particuliers permettant de simplifier nos systèmes d'équations.

En effet, dans tous les cas de figures envisagés, l'inconvénient des méthodes suggérées est le problème que pose la résolution des systèmes polynômiaux en pratique. Tout d'abord, notons que, vu la complexité des systèmes obtenus, il semble illusoire d'espérer avoir une solution algébrique, il faudra donc envisager l'utilisation de méthodes numériques. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, un système d'équations ayant plus d'équations indépendantes que d'inconnues n'a, en général, pas de solutions. Ce fait explique pourquoi la plupart des méthodes de résolution numérique imposent d'avoir autant d'équations que d'inconnues. Donc, il est impossible de prendre en compte autant de points que l'on en désirerait pour résoudre notre problème si on utilise ces méthodes. Mais alors, si on veut les utiliser, il faut pouvoir trouver *toutes* les solutions d'un système de 11 polynômes construits à partir des observations en 11 points (11 car on a 12 inconnues et que les équations sont homogènes en  $\mathbf{V}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  ce qui permet de fixer arbitrairement l'une des composantes d'un de ces vecteurs), afin de pouvoir filtrer par la suite les solutions qui ne sont pas vérifiées par les polynômes supplémentaires. Malheureusement, les rares méthodes qui convien-

nent ne travaillent que dans le domaine complexe. Or le nombre générique de solutions complexes dans les cas qui nous intéressent est très élevé : le théorème de Bezout nous apprend que génériquement, un système composé de 11 équations de type  $L_1$  a  $2^{11}C_{11}^5 = 946176$  solutions complexes (dont certaines à l'infini) parmi lesquelles se trouvent les solutions réelles que nous recherchons. On comprend donc l'intérêt qu'il peut y avoir à envisager des cas particuliers permettant d'utiliser des équations plus simples.

Remarquons finalement, qu'il serait possible de résoudre nos systèmes en minimisant la somme des carrés des équations. Cependant, ceci est, en général, une assez mauvaise idée car cela a tendance à introduire beaucoup de minima locaux ne correspondant pas à des zéros du système initial. Cette méthode n'est intéressante à utiliser que lorsqu'on connaît un point de départ pour la minimisation assez proche de la solution que l'on recherche. Comme nous ne voulons pas faire ce genre d'hypothèses nous ne considérerons pas dans la suite ce genre de méthodes.

Les simplifications que nous allons rechercher ici sont de trois types :

- Les simplifications tendant à diminuer le nombre des inconnues. En effet, le nombre de solutions génériques d'un système polynômial est directement fonction du nombre des équations (donc, quand on désire un nombre fini de solutions, du nombre d'inconnues du système) et de leurs degrés. Le degré des équations est un paramètre sur lequel il est difficile d'agir, il reste donc la possibilité de modifier le nombre des inconnues. Pour cela, le plus simple est d'imposer des contraintes sur le mouvement permettant de spécifier à priori les valeurs de certaines des composantes de  $\dot{\Omega}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\dot{\Omega}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$ .
- Les simplifications tendant à supprimer des équations les paramètres à évaluer sur la surface spatio-temporelle  $\Sigma$  les plus instables. Cette instabilité est directement liée au nombre de derivations nécessaires pour obtenir le paramètre ainsi que la nature de ces derivations (nous verrons en effet, qu'estimer une dérivée temporelle est un exercice plus difficile qu'estimer une dérivée spatiale). Des méthodes adaptées à ces cas particuliers seront plus robustes (et en général plus rapide aussi).

- Quand aucune des deux simplifications ci-dessus n'est possible, on recherchera les simplifications permettant d'imposer une contrainte polynomiale plus simple que les équations de départ. On pourra ainsi former un nouveau système en remplaçant une des équations originelles par cette contrainte, ce qui permet de diminuer le nombre de solutions.

Nous allons maintenant décrire un certain nombre de cas particuliers de ces deux types, en privilégiant toutefois les cas qui ont un sens physique. Mais avant de commencer cette description, revenons un instant sur le torseur cinématique.

### 3.1 Le torseur cinématique

Il est important de noter la dissymétrie entre les deux composantes  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{V}$  du torseur cinématique : en effet, si  $\boldsymbol{\Omega}$  a une signification intrinsèque qui ne dépend que de la nature du mouvement 3D,  $\mathbf{V}$  est juste la donnée de la vitesse d'un point considéré comme attaché au solide et dépend par conséquent du point où l'on exprime le torseur. Or, dans notre cas, le torseur est exprimé au centre optique de la caméra qui n'a, a priori, aucune caractéristique particulière vis à vis de l'objet observé. Par conséquent, on ne peut pas imposer directement des contraintes sur  $\mathbf{V}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  alors qu'il est possible de le faire avec  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  (On verra des exemples de mouvements contraints de cette manière dans la suite de cette section).

Mais rappelons certaines caractéristiques des torseurs cinématiques : le produit scalaire  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}$  est une grandeur constante quel que soit le point où le torseur est exprimé. Cela est facilement vérifiable à partir de la formule (2.1). En fait, cette propriété possède une interprétation physique :

Considérons l'ensemble des points  $\mathbf{M}$  tels que la vitesse  $\mathbf{V}_M$  soit proportionnelle au vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$ . Il est facile de démontrer que l'ensemble de ces points forme une droite qui est appelée *axe instantané de rotation*. Cet axe est défini par l'équation :

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}}{\boldsymbol{\Omega}^2} + \lambda \boldsymbol{\Omega}$$

où  $\lambda$  est un réel quelconque. Le produit scalaire  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}$  n'est rien d'autre que la valeur algébrique de la vitesse des points de cet axe. Autrement dit, tout point  $\mathbf{M}$  de l'axe instantané de rotation a pour vitesse :

$$\mathbf{V}_M = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}) \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}$$

La grandeur  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}$  a donc une signification physique en terme de valeur algébrique de vitesse et il est possible d'exprimer des contraintes sur cette expression.

Nous allons maintenant passer à la description des cas particuliers en les classant en 3 grandes catégories :

- Les mouvements de type particulier : dans ce cas, on va imposer des contraintes sur la nature même du mouvement pour restreindre notre étude à des sous- catégories de mouvements rigides plus simples que le cas général.
- Les mouvement à dynamique particulière : dans ce cas, on va imposer des contraintes non pas sur le mouvement mais plutôt sur son évolution au cours du temps.
- Les mouvement généraux pour un type de courbe particulier : dans ce cas, contrairement aux deux cas précédent, le mouvement sera totalement général, par contre on imposera à la courbe d'appartenir à une catégorie particulière qui sera ici la catégorie des courbes planes.

## 3.2 Mouvement particuliers

### 3.2.1 Mouvements de translation pure

De tels mouvements sont décrits tout simplement par les contraintes  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ . Dans ce cas (assez restrictif), les équations deviennent beaucoup plus simples : le degré total devient 2 au lieu de 4 et le nombre des variables n'est plus que de 6 (homogènes). Le nombre total de solutions réelles ou complexes

devient alors  $2^5 = 32$ , ce qui rend la résolution de ce système particulier extrêmement simple par rapport au cas général. Les méthodes dont nous disposons permettent de trouver les solutions de ces systèmes qui ne sont pas à l'infini.

### 3.2.2 Mouvements plans

Ce cas est constitué des mouvements d'objets se déplaçant dans un plan donné. C'est le cas de prédilection dans le cas d'une caméra placée sur un robot mobile se déplaçant dans une pièce plane (en supposant que tous les objets de la pièce ont également un mouvement plan). On supposera ici que le plan du mouvement est orthogonal au plan de la rétine  $\mathcal{R}$  (on élimine ainsi le cas peu intéressant où le plan du mouvement est parallèle au plan de la rétine : le mouvement 2D observé n'est alors rien d'autre que le mouvement 3D à un facteur d'échelle près). Dans toute la suite de cette section, on supposera ce plan parallèle à  $(Oxz)$ .

Un tel mouvement est décrit par les contraintes suivantes :  $\Omega_x = \Omega_z = 0$  et  $\mathbf{V}_y = 0$ . Ces contraintes étant vraies à tout instant, on a aussi :  $\dot{\Omega}_x = \dot{\Omega}_z = 0$  et  $\dot{\mathbf{V}}_y = 0$ . Dans ce cas, l'équation  $L_1$  ne dépend plus que de 6 variables ( $\mathbf{V}_x, \Omega_y, \mathbf{V}_z, \dot{\mathbf{V}}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\mathbf{V}}_z$ ) reste bien entendu homogène en  $(\mathbf{V}_x, \mathbf{V}_z, \dot{\mathbf{V}}_x, \dot{\mathbf{V}}_z)$  et est de degré total 4 (2 en  $(\Omega_y, \dot{\Omega}_y)$  et 2 en  $(\mathbf{V}_x, \mathbf{V}_z, \dot{\mathbf{V}}_x, \dot{\mathbf{V}}_z)$ ). Le nombre total de solutions d'un système écrit à partir de telles équations est de  $4^5 = 1024$ . On voit tout de suite que ce cas est beaucoup plus compliqué que le précédent même s'il reste raisonnable. Un autre problème survenant avec ce cas particulier est la nécessité de *calibrer* le robot en mouvement afin de déterminer quel est le plan du mouvement du robot. Une manière de faire cela est de faire effectuer au robot deux translations suivant les deux axes du plan du mouvement, pour chacune de ces translations on observe une courbe fixe et on en déduit les directions de  $\mathbf{V}$  à l'aide du système obtenu pour les translations pures : la direction du plan du mouvement est alors totalement définie par la donnée de ces deux vecteurs (on est alors libre de faire un changement de coordonnées pour se ramener à la situation étudiée ci-dessus).



### 3.3 Mouvement à dynamiques particulières

Nous allons voir que dans ce cas, les contraintes supplémentaires que l'on peut fixer ne permettent pas toujours de supprimer des variables. De plus, les systèmes obtenus ici sont des systèmes de complexité intermédiaire entre le système d'équations dans le cas général et les systèmes obtenus à la section précédente. Ces cas (plus généraux que ceux envisagés dans la section précédente) sont donc plus difficile à résoudre que les cas particuliers envisagés jusqu'ici mais néanmoins beaucoup moins compliqués que le cas général.

#### 3.3.1 Mouvements à vecteur accélération angulaire nul

Considérons un mouvement tel que  $\dot{\Omega} = \mathbf{0}$ . Une conséquence immédiate de cette hypothèse est que le nombre des inconnues intervenant dans notre système passe de 12 inconnues homogènes à 9 inconnues homogènes. Le degré et la structure des équations ne change, par contre, pas. Le nombre total de solutions complexes d'un système constitués de 8 équations de type  $L_1$  sous cette hypothèse est donc  $2^8 C_8^3 = 14336$ . Donc en faisant l'hypothèse que le mouvement relatif objet-caméra est un mouvement à accélération angulaire nulle, ce qui signifie que la direction de l'axe instantané de rotation ainsi que la vitesse angulaire de rotation sont fixées, on obtient un ensemble solution 100 fois plus petit !

#### 3.3.2 Mouvements à vitesses de translation et angulaire constantes

Dans le cas précédent, la direction de l'axe instantané de rotation était fixée. Ici, on va chercher à ne pas contraindre la direction de cet axe, mais plutôt à contraindre la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe et la vitesse de glissement le long de cet axe. D'après la section 3.1 dire cela, c'est dire :

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \text{constante} \\ \Omega \cdot \mathbf{V} &= \text{constante}\end{aligned}$$

Donc en dérivant ces équations par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}\Omega \cdot \dot{\Omega} &= 0 \\ \dot{\Omega} \cdot \mathbf{V} + \Omega \cdot \dot{\mathbf{V}} &= 0\end{aligned}$$

En remplaçant deux équations  $L_1$  par ces deux équations, on obtient un système possédant  $2^{11}C_9^4 = 258048$  solutions.

### 3.3.3 Mouvements de rotation autour d'un axe

Ce cas est très similaire au cas précédent, un tel mouvement est caractérisé par le fait que la vitesse de glissement le long de l'axe instantané de rotation est nulle. On obtient donc les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \dot{\Omega} \cdot \mathbf{V} + \Omega \cdot \dot{\mathbf{V}} &= 0\end{aligned}$$

Le système qu'on obtient dans ce cas ci à  $2^9C_{11}^5 = 236544$  solutions réelles ou complexes.

## 3.4 Mouvements de courbes planes

Le cas que nous allons envisager maintenant va jouer un rôle crucial dans la fin de ce rapport : en effet, si l'on suppose que l'on observe une courbe plane, il va être possible d'écrire une équation simplifiée correspondant à  $L_1$  mais :

- Ne faisant plus intervenir  $\dot{\Omega}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  donc ayant moins d'inconnues.
- De degré total deux.
- Ne faisant intervenir que les paramètres d'ordre 1 de  $\Sigma$ .

Les deux premières caractéristiques montrent que les systèmes obtenus seront plus simples (moins d'inconnues et degré plus faible), donc le nombre de

solutions éventuelles sera plus faible. La deuxième caractéristique montre qu'en plus d'être plus simples, les systèmes seront plus stables face aux bruits sur les valeurs mesurées. On peut donc également espérer que les solutions de ces systèmes seront elles aussi plus stables. Ces deux raisons ont motivé le choix que nous avons fait d'implémenter ce cas de figure avant le cas général.

A la base, toutes ces simplifications sont obtenues grâce à l'introduction d'inconnues supplémentaires qui correspondent à la normale au plan de la courbe.

### 3.4.1 L'équation dans le cas plan

Soit  $\mathbf{M} = [X, Y, Z]^T$  un point de la courbe plane. Ce point appartient au plan de la courbe. Si l'on suppose que l'image de la courbe n'est pas dégénérée en un segment, alors cela signifie que le plan de la courbe ne passe pas par le centre optique. Le point  $\mathbf{M}$  vérifie donc l'équation suivante :

$$aX + bY + cZ + 1 = 0 \quad (3.1)$$

Introduisons donc  $\mathbf{N} = [a, b, c]^T$ , le vecteur normal au plan de la courbe. En combinant l'équation (3.1) avec l'équation (1.1), on obtient :

$$axZ + byZ + cZ + 1 = 0$$

Soit encore :

$$Z = \frac{-1}{ax + by + c} \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) est fondamentale car elle relie la structure plane de la courbe  $Z$  aux mesures de l'image  $x, y$ . Mais rappelons nous l'équation (2.14) :

$$Z(\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}$$

En remplaçant  $Z$  par sa valeur donnée par l'équation (3.2) dans l'équation (2.14), on obtient :

$$-\frac{\beta - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}}{ax + by + c} = \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V} \quad (3.3)$$

L'équation (3.2) a joué un rôle essentiel : elle a permis de remplacer une grandeur  $Z$  variant le long de la courbe observée par 3 grandeurs  $a, b, c$  qui sont elles constantes le long de celle-ci. On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 10** *En tout point de  $(c_\tau)$  considérée comme la projection d'une courbe 3D plane, il est possible d'écrire une équation polynômiale en les coordonnées de  $\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{N}$ .*

$$\beta - \Omega \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}) = 0 \quad (3.4)$$

*Cette équation n'est pas homogène en  $\mathbf{V}$  mais on peut remarquer que si  $(\mathbf{V}, \mathbf{N})$  est solution alors  $(\lambda \mathbf{V}, \frac{1}{\lambda} \mathbf{N})$  est aussi solution pour tout  $\lambda \neq 0$  : cette propriété nous montre que, dans ce cas ci aussi, seule la direction de  $\mathbf{V}$  peut être récupérée. L'équation est de degré 2 en  $(\mathbf{V}, \mathbf{N})$ , de degré 1 en  $\Omega$  et de degré total 2. Dans la suite, nous appellerons cette équation l'équation plane.*

En exprimant cette équation en 8 points, on obtient un système en  $(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{N})$  de degré 2 à 9 inconnues. Une application directe du théorème de Bezout nous apprend qu'un tel système possède  $2^8 = 256$  solutions complexes.

On peut donc reformuler la conjecture du chapitre précédent dans ce cas particulier :

**Conjecture 2** *Le torseur cinématique  $(\Omega, \mathbf{V})$  et la normale au plan  $\mathbf{N}$  d'une courbe 3D plane et rigide peuvent en général être estimés à partir de l'observation de la surface spatio-temporelle engendrée par son image dans la rétine en résolvant un système d'équations polynômiales. La profondeur peut être estimée en chaque point à un facteur d'échelle près à l'aide de l'équation (3.2).*

Bien entendu, ici encore cette conjecture est fausse dans certains cas particuliers comme, par exemple, les droites mais aussi, comme nous le verrons par la suite, les coniques.

Notons que comme dans le cas général nous avons beaucoup plus d'équations que d'inconnues. Tout cela fait du cas plan un cas idéal pour effectuer des tests.

### 3.4.2 Nombre de solutions

Regardons les coefficients de l'équation (3.4) en les variables  $x, y, \mathbf{t}, \beta$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \text{coefficient en } \beta: & 1 \\ \text{coefficient en } \mathbf{t}_x: & \boldsymbol{\Omega}_x + c\mathbf{V}_y \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{coefficient en } \mathbf{t}_y: \boldsymbol{\Omega}_y - c\mathbf{V}_x \quad (3.6)$$

$$\text{coefficient en } x\mathbf{t}_x: a\mathbf{V}_y - \boldsymbol{\Omega}_z \quad (3.7)$$

$$\text{coefficient en } y\mathbf{t}_y: -\boldsymbol{\Omega}_z - b\mathbf{V}_x \quad (3.8)$$

$$\text{coefficient en } x\mathbf{t}_y: c\mathbf{V}_z - a\mathbf{V}_x \quad (3.9)$$

$$\text{coefficient en } y\mathbf{t}_x: b\mathbf{V}_y - c\mathbf{V}_z \quad (3.10)$$

$$\text{coefficient en } x(x\mathbf{t}_y - y\mathbf{t}_x): \boldsymbol{\Omega}_y + a\mathbf{V}_z \quad (3.11)$$

$$\text{coefficient en } y(x\mathbf{t}_y - y\mathbf{t}_x): b\mathbf{V}_z - \boldsymbol{\Omega}_x \quad (3.12)$$

Ces différents termes traduisent la manière dont l'information relative à  $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$  est codée dans l'équation (3.4) et ce indépendamment du point auquel l'équation est considérée. Autrement dit, toute grandeur qu'il n'est pas possible de calculer à partir de ces expressions ne peut pas être calculée à partir des équations. De plus, toute transformation sur les grandeurs intervenant dans  $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$  laissant ces termes invariants généreront des classes de solutions qui seront indistinguables du point de vue du système. Nous allons maintenant utiliser cette propriété pour prouver qu'à toute solution du système, il est possible d'associer une solution duale.

Pour cela remarquons tout d'abord qu'il est possible d'éliminer les composantes de  $\boldsymbol{\Omega}$  entre les équations (3.5),(3.12), les équations (3.6),(3.11) et les équations (3.7),(3.8). On obtient ainsi les expressions :

$$b\mathbf{V}_z + c\mathbf{V}_y$$

$$c\mathbf{V}_x + a\mathbf{V}_z$$

$$a\mathbf{V}_y + b\mathbf{V}_x$$

$$c\mathbf{V}_z - a\mathbf{V}_x$$

$$c\mathbf{V}_z - b\mathbf{V}_y$$

Or on remarque qu'il est possible d'échanger les rôles de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{N}$  dans ces expressions sans en changer la valeur. Regardons s'il est possible de trouver un  $\mathbf{\Omega}$  qui permettra d'avoir la même propriété sur les expressions initiales. Il suffit donc d'être capable de vérifier cela sur les expressions (3.5), (3.8) et (3.11). En échangeant  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{N}$  dans ces expressions et en égalant les nouvelles valeurs avec les anciennes, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}'_x + b\mathbf{V}_z &= \mathbf{\Omega}_x + c\mathbf{V}_y \\ \mathbf{\Omega}'_y + c\mathbf{V}_x &= \mathbf{\Omega}_y + a\mathbf{V}_z \\ \mathbf{\Omega}'_z + a\mathbf{V}_y &= \mathbf{\Omega}_z + b\mathbf{V}_x\end{aligned}$$

La résolution de ce système en  $\mathbf{\Omega}'$  est immédiate et on s'aperçoit qu'il faut prendre  $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{N}$

On a donc le théorème suivant :

**Théorème 11** *Si  $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$  est une solution pour le cas d'une courbe plane alors  $(\mathbf{\Omega} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{N}, \mathbf{V})$  est également solution.*

Ce théorème n'est que la spécialisation au cas des courbes d'un théorème bien connu dans le cas où les observations sont des points dans un plan [May92]. Notons que ce théorème nous permet de ne considérer que 128 solutions sur les 256 théoriquement possibles. Pour donner un exemple de la surévaluation du nombre des solutions par l'application du théorème de Bezout à un sous-ensemble des équations, notons que dans tous les cas particuliers (sauf bien sûr dans le cas de droites ou de coniques comme nous le verrons dans la section suivante) que nous avons résolus nous n'avons toujours trouvé que 2 solutions réelles satisfaisant la totalité des équations.

Pour finir ce chapitre, nous allons donner brièvement quelques résultats concernant un type de courbes 3D planes particulières : les coniques.

### 3.4.3 Le cas des coniques

Dans le cas où la courbe observée est, à chaque instant, une conique, on peut démontrer que la courbe 3D associée est également une conique. Il est donc

possible d'appliquer notre théorie pour les courbes planes à ce cas particulier. Supposons qu'à l'instant  $t$ , nous observons une conique définie par l'équation :

$$F(a, x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0 \quad (3.13)$$

où les coefficients  $a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}$  et  $a_{00}$  sont des fonctions ne dépendant que du temps. Soit  $\dot{F}$  l'équation dérivée de  $F$  par rapport au temps et  $F_x$  et  $F_y$  les dérivées spatiales de  $F$  respectivement par rapport à  $x$  et  $y$ . Il est possible de donner des formules analytiques pour  $\beta$  et  $\mathbf{t}$  en fonction des coefficients de  $F$  de leurs dérivées temporelles et de  $x$  et  $y$  (Ces formules sont d'ailleurs valables pour toute courbe donnée de manière implicite).

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \mathbf{t}_x &= F_y / ds \\ \mathbf{t}_y &= -F_x / ds \\ \beta &= -\dot{F} / ds \end{aligned}$$

En remplaçant ces grandeurs par leurs valeurs dans l'équation (3.4), on obtient une nouvelle équation ne dépendant plus que de  $x, y$  et des coefficients de  $F$  et de leurs dérivées temporelles qui sont bien entendu des valeurs constantes le long de la courbe à  $t$  fixé.

En appliquant la technique d'élimination mentionnée au chapitre précédent entre l'équation de la conique et l'équation (3.4), et en prenant les coefficients de cette équation, on obtient un système de 5 équations à 8 inconnues. Cela prouve que l'observation d'une conique seule sans adjonction d'hypothèses supplémentaires est insuffisante pour récupérer le mouvement. Il est, en effet, possible alors de fixer arbitrairement  $\mathbf{V}$  (ou de manière équivalente  $\mathbf{N}$ ) pour tomber sur un système linéaire en 5 équations et 6 inconnues ( $\mathbf{\Omega}, \mathbf{N}$ ) (respectivement en ( $\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}$ )) qui (sauf circonstance exceptionnelle) aura toujours une solution unique. On voit donc que l'observation d'une conique donne lieu à une triple infinité de mouvements (et donc de structures) différents.

De plus, si l'on dérive ces 5 équations par rapport au temps en faisant intervenir  $\dot{\mathbf{\Omega}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  et en remplaçant  $\dot{\mathbf{N}}$  par sa valeur obtenue en résolvant

l'équation (2.6), on obtient un système qui fait intervenir les même mesures que les systèmes obtenus à partir de l'équation  $L_1$ . Or ce nouveau système a toujours plus d'inconnues que d'équations et n'a donc pas un nombre fini de solutions. Cela nous permet de soupçonner que les 17 équations obtenues en appliquant la technique d'élimination à  $L_1$  dans le cas d'une conique ne sont pas indépendantes et qu'il n'est donc pas possible de récupérer le mouvement à l'aide de celles-ci sans faire une hypothèse supplémentaire quant à la nature du mouvement.

La situation est encore pire avec des droites puisqu'on obtient seulement deux équations par droite.

Notons que le schéma décrit ci-dessus peut être généralisé à toute courbe algébrique. L'équation  $F$  devient alors une équation polynômiale implicite. On trouve alors que le nombre d'équations obtenues pour une courbe de degré  $n$  est  $\frac{n(n+3)}{2}$  ce qui est exactement le nombre de points nécessaires pour définir la courbe de manière unique. Donc pour toute courbe de degré supérieur ou égal à 3, on obtient plus de 8 équations indépendantes par cette méthode ce qui nous assure de ne pas avoir génériquement de dégénérescences du type de celles constatées avec les droites ou les ellipses et donc d'avoir un nombre fini de solutions.



# Chapitre 4

## Implémentation

Le but de ce chapitre est de décrire les tests qui ont été faits à partir des équations dérivées aux chapitres précédents. Essentiellement, deux types d'expériences seront décrits : le premier utilise un type de courbe connu (ce seront des ellipses) avec un mouvement de translation. Ce premier cas nous a permis d'étudier nos systèmes d'équations et de regarder leur comportement. La deuxième expérience dont il sera question ici est le cas des courbes planes puisque pour les raisons qui ont été décrites au chapitre précédent ce cas a de bonnes propriétés de stabilité et la résolution des systèmes issus de ce cas est plus simple. Nous utiliserons dans ces deux expériences deux méthodes différentes pour résoudre les systèmes et nous regarderons les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elle.

Cependant, dans toutes les expériences, la première étape consiste à adapter le modèle de caméra qui a été utilisé pour dériver les équations aux caméras réelles. C'est ce que nous allons faire dans la section qui suit.

### 4.1 Coordonnées normalisées et coordonnées image

Dans tous les chapitres précédents, nous avons supposé que le plan rétinien  $\mathcal{R}$  était muni d'une structure euclidienne héritée de la structure euclidienne de l'espace 3D. C'est cette hypothèse qui nous a permis d'écrire les produits

scalaires et les vectoriels qui sont nécessaires à l'écriture de nos équations. On peut noter que cette structure euclidienne sert même dans les définitions initiales. En effet, parler de flot normal suppose déjà l'existence de la notion d'angle qui est liée au produit scalaire.

Cependant, lorsqu'on travaille avec des images, on a pris l'habitude, pour des raisons de commodité, de se servir d'un repère tel que les coordonnées d'un point soient deux entiers qui correspondent aux indices du point dans l'image considérée comme un tableau à deux dimensions de points. On appelle ces coordonnées *coordonnées image*. Deux conséquences de l'utilisation de ces coordonnées, nous concernent : la première est celle mentionnée ci-dessus, le produit scalaire usuel ne définit pas dans ce repère une structure euclidienne compatible avec la structure euclidienne de l'espace observé, la deuxième est que l'origine de ces repères est en général le coin en haut à gauche de l'image alors que dans notre étude théorique cette origine est la projection orthogonale (dans l'espace 3D) du centre optique de la caméra sur la rétine  $\mathcal{R}$ .

Il résulte de tout ceci qu'avant toute chose il est nécessaire de plaquer la structure euclidienne de l'espace sur la rétine  $\mathcal{R}$  et d'en déduire le produit scalaire qui permettra d'avoir une structure euclidienne sur  $\mathcal{R}$  conforme à celle de l'espace.

Or, les relations entre coordonnées image et coordonnées normalisées ont été très étudiées au cours des travaux portant sur la calibration des caméras. Nous reprendrons ici le modèle défini dans [Tos87] et qui est communément utilisé :

$$x = h_1 u + h_2 v + h_3 \quad (4.1)$$

$$y = h_4 v + h_5 \quad (4.2)$$

où  $x, y$  désignent les coordonnées normalisées d'un point,  $u, v$  dénotent les coordonnées image de ce même point.  $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$  sont appelés paramètres intrinsèques de la caméra. Il faudra donc effectuer le changement de coordonnées défini par les équations (4.1) et (4.2) avant toute opération de calcul de dérivée dans les image.

Il est à noter que nous avons considéré ici que la transformation coordonnées image coordonnées normalisées est indépendante du temps. On a également

supposé que l'intervalle de temps séparant deux images est parfaitement connu. A partir de ces équations, il est possible de trouver les relations liant les dérivées images aux dérivées normalisées.

Soit  $f(x, y, t) = g(u, v, t) = 0$  l'équation de la surface spatio-temporelle respectivement dans les coordonnées normalisées et dans les coordonnées image. En remplaçant  $x$  et  $y$  par leurs valeurs données par les équations (4.1) et (4.2) et en dérivant par rapport à  $u$  et  $v$ , on obtient les relations suivantes reliant les dérivées spatiales et temporelles calculées sur  $(\Sigma)$  en coordonnées normalisées et en coordonnées image.

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{g_u}{h_1} \\
 f_y &= \frac{h_1 g_v - h_2 g_u}{h_1 h_4} \\
 f_t &= g_t \\
 f_{xx} &= \frac{g_{uu}}{h_1} \\
 f_{xy} &= \frac{h_1 g_{uv} - h_2 g_{uu}}{h_1^2 h_4} \\
 f_{yy} &= \frac{h_1^2 g_{vv} + h_2^2 g_{uu} - 2h_1 h_2 g_{uv}}{h_1^2 h_4^2} \\
 f_{xt} &= \frac{g_{ut}}{h_1} \\
 f_{yt} &= \frac{h_1 g_{vt} - h_2 g_{ut}}{h_1 h_4} \\
 f_{t^2} &= g_{t^2}
 \end{aligned}$$

Comme les paramètres spatio-temporels (en coordonnées normalisées) peuvent être écrits comme des fonctions de  $f_x, f_y, f_t, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xt}, f_{yt}, f_{t^2}$ , les relations précédentes permettent d'exprimer les paramètres spatio-temporels en fonction des dérivées images et des paramètres de calibration.

## 4.2 Ellipses en translation pure

Le but de cette première expérience était d'essayer de voir sur un exemple simple le nombre de solutions réelles du système d'équations et surtout d'évaluer la stabilité de ces solutions au bruit sur les mesures. Nous avons choisi un mouvement de translation pure afin de faciliter la résolution du système. Le protocole expérimental a été le suivant :

- On s'est donné un cercle 3D, son mouvement et les paramètres d'une caméra.
- Une séquence de 29 images a été obtenue en effectuant la projection du cercle sur la caméra à chaque instant  $t$  ( $t$  allant de 0 à 28). Pour cela, les intensités lumineuses correspondant au fond et à l'intérieur du disque que définit le cercle ont été fixées. Les images d'intensités ainsi obtenues ont été de plus bruitées avec un bruit gaussien sur les intensités de 20 de déviation standard.
- Les contours de ces images ont été extraits à l'aide d'un extracteur de contour standard. Comme les positions de ces points sont restées relativement stables malgré le bruit d'intensité que nous avons rajouté, nous avons éventuellement bruité les positions de ces points de contour à l'aide d'un bruit gaussien de déviation standard allant jusqu'à 0.5 pixels.
- A chaque instant, une ellipse a été ajustée pour passer par les points de contours extraits. Les coefficients de ces ellipses ainsi que leurs dérivées temporelles jusqu'à l'ordre deux permettent de calculer les paramètres spatio-temporels nécessaires. Il est à noter que nous avons fixé ici le modèle de la courbe observée et que cela n'a pas toute la généralité souhaitable. Cependant, comme il s'agissait là de la première expérience menée sur des images, nous avons préféré nous placer dans des conditions assez favorables afin de ne pas cumuler plusieurs problèmes.
- Une première étape a ensuite consisté à comparer les paramètres calculés à leurs valeurs théoriques afin de s'assurer de la qualité de ceux-ci.

- Puis deux jeux de 11 équations ont été obtenus : le premier en remplaçant les valeurs des paramètres des ellipses dans 11 des 17 équations “éliminées” de l’ellipse, le deuxième en prenant 11 points répartis de manière régulière le long des ellipses images et en calculant la valeur de l’équation  $L_1$  en chacun de ces points. Ces deux jeux d’équations ont été écrits à chaque instant.
- Nous avons résolu ces systèmes en utilisant différentes méthodes et comparé les résultats obtenus avec les résultats théoriques. Deux méthodes numériques radicalement différentes ont été utilisées pour effectuer la résolution des systèmes :
  - La méthode des continuations : cette méthode qui a déjà été mentionnée au chapitre précédent permet d’obtenir toutes les solutions réelles et complexes d’un système de polynômes. Pour ce faire, on commence par établir un système de polynômes ayant la même structure (degré et nombre de variables) que le système de polynômes que l’on cherche à résoudre et pour lequel toutes les solutions sont connues et distinctes. Puis ce système initial est déformé de manière continue vers le système que l’on cherche à résoudre. La méthode de résolution consiste à poursuivre les zéros du système initial au cours de cette déformation. A la fin de la déformation chacun des zéros initiaux se sera transformé en un des zéros du système final. Notons cependant que trois types d’accidents peuvent survenir au cours d’une telle résolution : tout d’abord certains zéros tendent vers l’infini, ensuite il peut arriver que les chemins de deux zéros distincts se rejoignent, enfin il peut également arriver que la méthode n’arrive pas à converger. De ces trois problèmes seul le premier est survenu au cours de nos expériences et cela n’a pas grande importance puisque seules les solutions finies nous intéressent. Pour plus de détails sur cette méthode de résolution voir [Mor87].
  - La deuxième méthode suit un peu l’idée des continuations mais abandonne l’idée d’obtenir tous les zéros du système. Contrairement à la méthode précédente, qui prend en compte les systèmes d’équations successifs (aux différents instants) de manière totalement indépendante, cette méthode va essayer de se servir de la

cohérence temporelle que doivent avoir les solutions. Pour cela, on part d'un point  $\mathbf{V}_0, \dot{\mathbf{V}}_0$  arbitraire. On se sert d'une méthode de Newton à partir de ce point initial pour trouver une solution du système à  $t = 0$ . En linéarisant la loi d'évolution de  $\mathbf{V}$ , on peut déduire comment cette vitesse se sera transformée à l'instant suivant. On se sert alors de cette vitesse comme point initial pour résoudre (toujours en utilisant la méthode de Newton) le système obtenu à l'instant  $t = 1$ , et ainsi de suite. Sur l'exemple que nous avons utilisé, cette méthode donnait toujours après 4 ou 5 itérations le zéro recherché (cependant aucun résultat théorique ne semble garantir que cela sera toujours vrai).

Les figures 4.1 et 4.2 montrent la composante  $\mathbf{V}_y$  trouvée au cours du temps. Pour cette résolution, on a fixé arbitrairement  $\mathbf{V}_x = 1$  (n'oublions pas en effet que le système est homogène en  $\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}$ ). Les mauvais résultats autour de  $t = 0$  s'expliquent par le fait qu'à  $t = 0$   $\mathbf{V}_x = 0$  ce qui est incompatible avec la normalisation précédente.

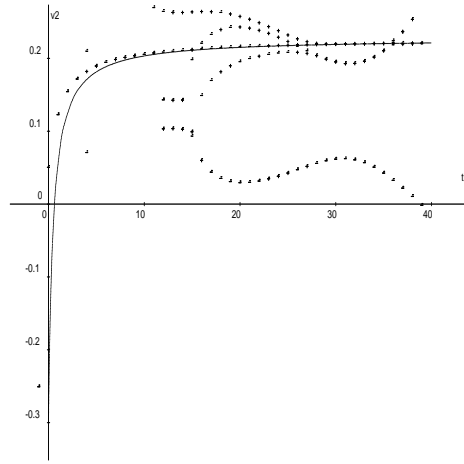


FIG. 4.1 - Variation d'un des paramètres du mouvement ( $\mathbf{V}_y$ ) au cours du temps. La méthode des continuations a été appliquée à un système d'équations obtenu en calculant l'équation  $L_1$  en 11 points répartis sur l'ellipse observée. La courbe en trait plein est la valeur théorique de  $\mathbf{V}_y$ .

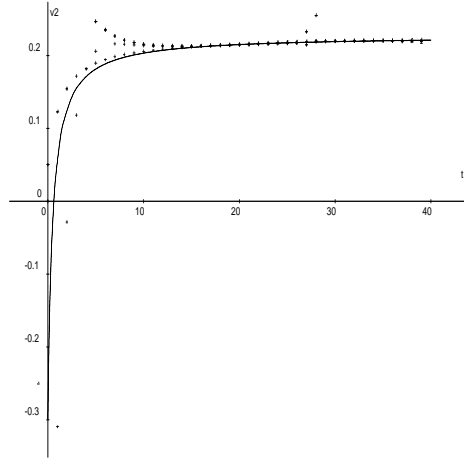


FIG. 4.2 - Variation d'un des paramètres du mouvement ( $\mathbf{V}_y$ ) au cours du temps. La méthode des continuations a été appliquée à un système d'équations obtenu en prenant 11 des 17 équations "éliminées" de l'ellipse. La courbe en trait plein est la valeur théorique de  $\mathbf{V}_y$ .

On remarque immédiatement que le système d'équations "éliminées" conduit à un nombre de solutions beaucoup plus faible que l'autre. Il semble donc extrêmement intéressant d'utiliser ce genre de systèmes lorsqu'on connaît le type de courbes observées. Cela nous a également fourni une motivation pour essayer de développer une méthode utilisant plus d'équations que d'inconnues (puisque cela semble réduire le nombre des solutions).

La figure 4.3 montre cette même composante calculée à partir du système d'équations éliminées en utilisant la seconde méthode de résolution. On s'aperçoit que très vite la solution trouvée colle à la courbe théorique malgré l'initialisation aléatoire. Cela renforce l'idée que le nombre de solutions du système compatibles avec la loi d'évolution temporelle est faible.

On peut se demander comment se comportent les solutions si l'on rajoute du bruit sur nos mesures initiales (ici ce sont les points de contours). Pour cela, nous avons successivement ajouté un bruit gaussien en position d'abord de 0.2 puis de 0.5 pixels de variance. Dans le premier cas, le mouvement a pu être récupéré dans tous les cas de figures, dans le second cas seule la méthode de

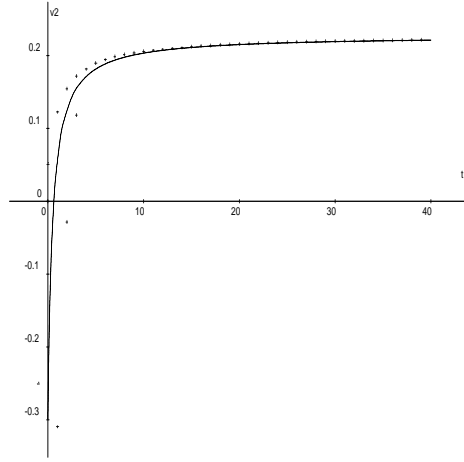


FIG. 4.3 - Variation d'un des paramètres du mouvement ( $\mathbf{V}_y$ ) au cours du temps. Ces résultats ont été obtenus en appliquant une sorte de méthode de continuation dans le temps en partant d'un point initial quelconque. On constate que très rapidement la solution tombe sur la courbe en trait plein qui représente la solution théorique.

résolution se basant sur les équations éliminées permet de récupérer (avec une marge d'erreur raisonnable) la translation. Il faut cependant noter qu'appliquer ce genre de bruit est extrêmement pénalisant puisque la structure de contour est totalement détruite lors de cette opération. Il en résulte que les dérivées secondes en temps des paramètres des ellipses sont très difficiles à estimer.

L'ensemble de ces résultats tend à montrer que pour des raisons de nombre et de stabilité des solutions, il est essentiel de pouvoir prendre en compte soit les équations éliminées quand cela est possible soit le plus grand nombre possible d'équations au point. Pour cela, nous avons essayé d'adapter une méthode numérique générale à notre cas particulier.

### 4.3 Une méthode de résolution

Aussi bien dans le chapitre 3 que dans la section précédente, nous avons vu à quel point il est crucial, pour des raisons d'efficacité de la méthode de réso-



lution, pour des raisons de nombre de solutions réelles et pour des raisons de stabilité, d'avoir une méthode numérique permettant de résoudre des systèmes ayant plus d'équations que d'inconnues. Rappelons, encore une fois, que dans le cas général ce genre de systèmes n'a aucune solution, mais que nous nous trouvons avec nos systèmes dans le cas très particulier où existe au moins une solution.

De plus les expériences précédentes nous ont convaincus que le nombre de solutions en pratique de ces systèmes est assez faible et qu'il existe une bonne chance de tomber sur une solution raisonnable à partir d'une estimée initiale quelconque. Dans la mesure où nous ne sommes pas en mesure (ni théoriquement ni même pratiquement) de compter le nombre de solutions, nous allons donc abandonner l'idée de calculer toutes celles-ci au profit d'une méthode qui à partir d'une initialisation aléatoire fournit une solution (en espérant que celle-ci est unique ou que la poursuite de cette solution au cours du temps amène toujours sur la solution recherchée).

Nous avons donc modifié la méthode de Newton multidimensionnelle afin de l'adapter à nos exigences. Dans cette méthode qui ne sera pas décrite en détail ici, l'hypothèse autant d'équations que d'inconnues n'intervient qu'au moment de l'inversion de la jacobienne du système (on a besoin que cette jacobienne soit une matrice carrée pour pouvoir calculer son inverse). Or cette inversion ne sert qu'à résoudre un système linéaire. Donc si l'on veut pouvoir résoudre un système d'équations avec plus d'équations ( $m$ ) que d'inconnues ( $n$ ), on est amené à résoudre à chaque pas de la méthode un système linéaire également à  $m$  équations et  $n$  inconnues. En remplaçant la résolution exacte du système linéaire par une résolution approchée aux moindres carrés, on obtient la méthode désirée.

Cette méthode a été appliquée à des équations choisies parmi les équations d'une famille linéaire de cercles et a donné de bons résultats même lorsqu'on a perturbé les équations. Elle a donc montré sur cet exemple qu'elle possède de bonnes propriétés de convergence et de stabilité au bruit.

## 4.4 Cas des courbes planes

De nombreux essais nous ont montrés la difficulté d'estimer avec une bonne précision les paramètres spatio-temporels. Les dérivées temporelles surtout semblent difficiles à obtenir : il semble que cela soit dû à des problèmes d'échantillonnage en temps. En effet, alors que l'échantillonnage spatial d'une image est connu et constant (il est fixé par les paramètres physiques de la caméra), l'échantillonnage temporel de la surface spatio-temporelle autour d'un point  $P$  dépend de la vitesse de ce point. En d'autres termes, autour d'un point  $P$  de  $\Sigma$ , ayant une vitesse normale petite  $\Sigma$  est mieux échantillonnée qu'au voisinage d'un point ayant une vitesse normale élevée. L'influence sur les dérivées temporelles est évidente si on se rappelle la figure 1.7 : plus les courbes  $(c_\tau)$  et  $(c_{\tau+d\tau})$  seront éloignées et moins bien la surface  $\Sigma$  sera échantillonnée dans la direction  $\mathbf{n}_\beta$ . Or les dérivées temporelles peuvent s'obtenir très simplement en considérant la courbe tracée sur  $\Sigma$  définie par le plan passant par le point  $\mathbf{m}$  où l'on cherche à déterminer les paramètres spatio-temporels, et ayant pour vecteurs directeurs  $\mathbf{n}$  la normale en  $\mathbf{m}$  et  $\tau$  le vecteur directeur de l'axe temporel. Moins bien cette courbe est échantillonnée et moins bonne sera la précision des dérivées temporelles.

Pour cette raison, nous avons décidé d'implémenter d'abord le cas des courbes planes qui a l'avantage de ne faire intervenir que les paramètres spatio-temporels d'ordre 1 ( $\mathbf{n}$  et  $\beta$ ) avant de passer au cas général. La suite de cette section décrira l'implémentation du cas des courbes planes. Dans la section suivante nous montrerons quelques résultats préliminaires d'évaluations des paramètres spatio-temporels d'ordre 2 qui devraient nous permettre d'obtenir d'aboutir à une implémentation du cas général. Dans toute la suite, on supposera que dans chaque image un contour particulier est désigné (le contour dont le mouvement nous intéresse). De plus, on supposera que les points de la chaîne dans chaque image ont été chaînés en une chaîne de pixels (un programme couramment dénommé *linker* se charge de ce travail. De plus dans toute la suite et sauf indication contraire nous montrerons les résultats obtenus à l'instant 14 en utilisant une séquence de 29 images (numérotées de 0 à 28). Cette séquence d'image (voir figure 4.4) représente une quartique plane effectuant une rotation autour d'un axe vertical ainsi qu'une translation. Les

niveaux d'intensités ont été bruité avec un bruit gaussien de rapport signal sur bruit de 20%.

Voici le schéma général de l'implémentation :

- Construction de la surface spatio-temporelle.
- Estimation des paramètres spatio-temporels.
- Normalisation des paramètres et résolution du système.

Chacune de ces étapes va être décrite dans les paragraphes suivants.

#### **4.4.1 Construction de la surface spatio-temporelle**

Afin de rendre les temps de calcul plus raisonnables, il est nécessaire de rassembler les points de la surface spatio-temporelle dans une structure permettant de calculer facilement les points voisins d'un point donné. Pour cela, on reprend le chaînage en sortie du linker et on plaque sur chaque chaîne de pixels une liste doublement chaînée. De plus, pour rattraper certaines erreurs du détecteur de contour, nous nous autorisons à chaîner des points non contigus (un seuil contrôle la distance maximale au delà de laquelle deux points ne seront plus chaînés). De plus, au cours de cette étape une abscisse curviligne est associée à chaque point en choisissant une origine arbitraire sur le contour et en sommant les distances élémentaires le long du contour. Une deuxième étape consiste à chaîner la courbe à l'instant  $\tau$  ( $c_\tau$ ) avec celle à l'instant  $\tau + d\tau$  ( $c_{\tau+d\tau}$ ). Pour cela, à chaque point  $\mathbf{m}_\tau$  de la courbe ( $c_\tau$ ), on associe un des points de ( $c_{\tau+d\tau}$ ) qui se trouve à distance minimale de  $\mathbf{m}_\tau$  (il est à noter qu'il peut exister plusieurs tels points mais en général pour une courbe ceux-ci sont tous situés dans un même voisinage, on en choisit donc un arbitrairement). L'algorithme ne parcourt pas à chaque étape la totalité de la chaîne ( $c_{\tau+d\tau}$ ). En effet, comme on chaîne chaque point de la courbe ( $c_\tau$ ) dans l'ordre du chaînage spatial, une fois la correspondance du premier point établie, on se contente pour trouver le correspondant d'un nouveau point de chercher celui-ci dans le voisinage du correspondant de son prédécesseur dans le chaînage. On effectue ensuite le même travail pour chaîner les points de ( $c_{\tau+d\tau}$ ) aux points de ( $c_\tau$ ), ce qui définit ainsi un double chaînage en temps.

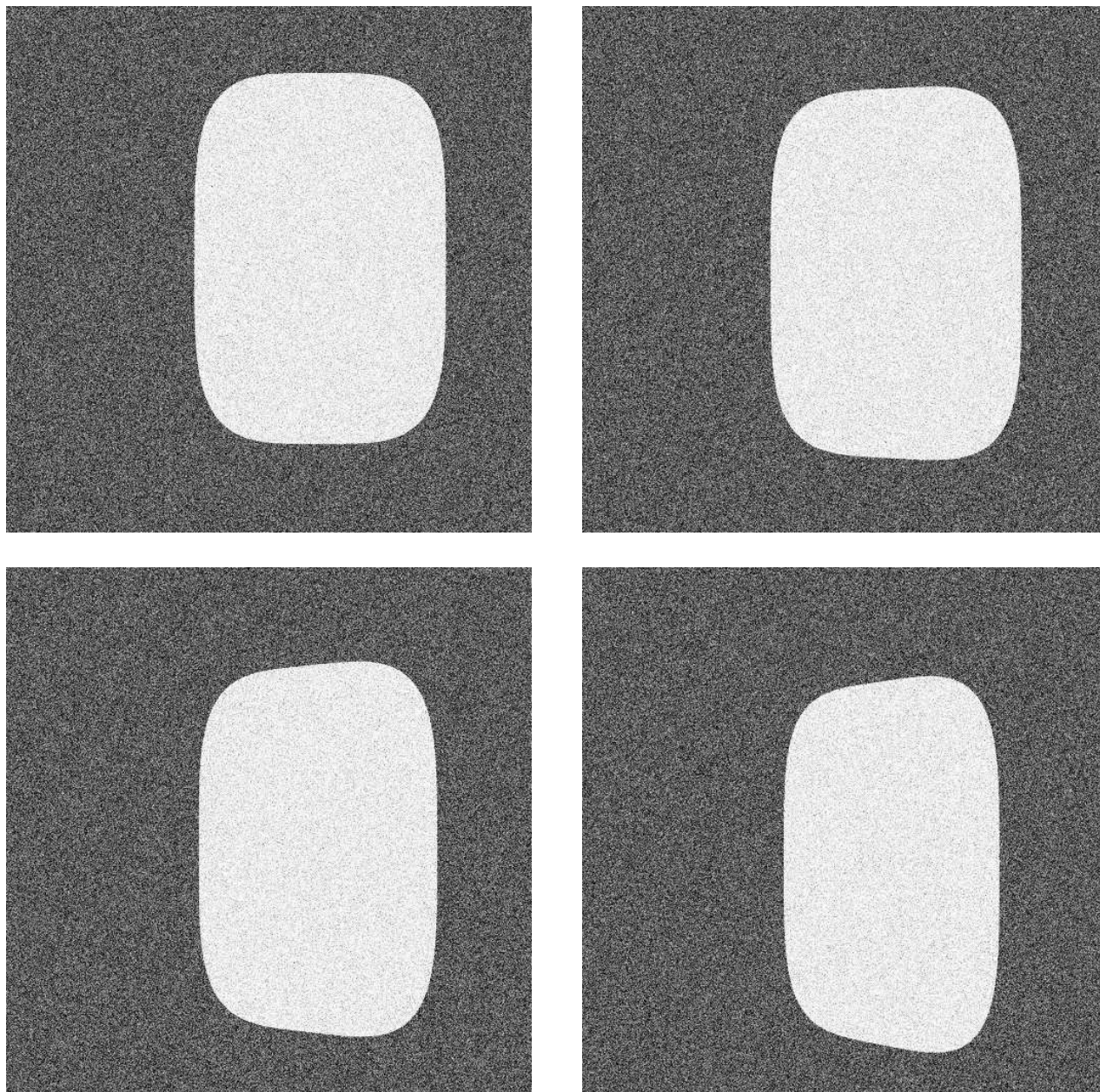


FIG. 4.4 - De gauche à droite et de haut en bas : les images de départ aux instants 0,10,20 et 30. Un bruit gaussien de rapport signal/bruit de 20% a été rajouté sur les intensités.